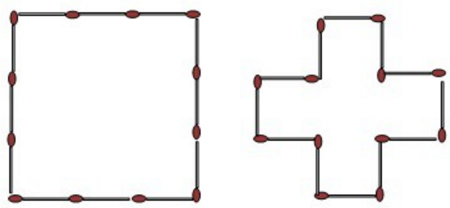
VIE DE LA RÉGIONALE

Rallye 2015 : retours sur l’exercice 4 « Allum’aire »



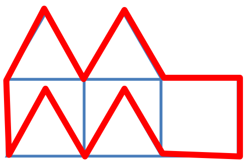
Rappel de l'énoncé : Le commissaire Girard a cessé de fumer la pipe depuis bien longtemps mais il a conservé une boîte d’allumettes. Il lui arrive souvent de se relaxer durant une enquête compliquée en manipulant les petits bâtonnets de bois soufrés.

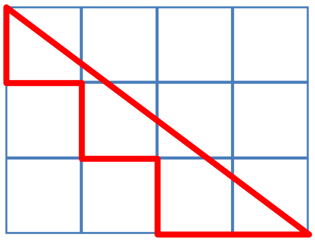
En considérant que l’unité de longueur est une allumette, notre commissaire en prend 12 et forme successivement un carré de 9 unités d’aire et une croix de 5 unités d’aire.

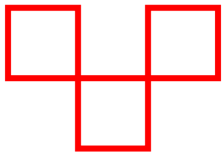
En utilisant les 12 allumettes (sans chevauchement), formez un polygone ayant une aire de 3 unités d’aire.

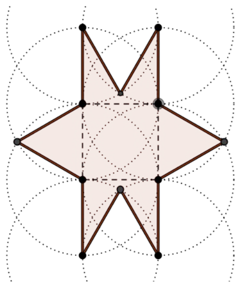
Cet énoncé est à mettre en relation avec le défi collège défi collège n°119 « Avec 12 allumettes », lui même inspiré d’un défi proposé par Martin Gardner.

Le groupe des correcteurs avait envisagé, a priori, trois types de stratégies pouvant être celles des élèves.



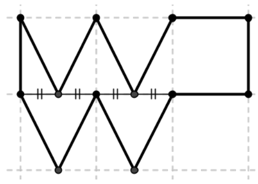


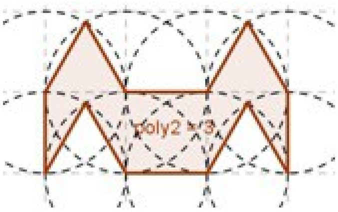




La première, partant d'un rectangle 3x1, consiste à déplacer des « morceaux » en les reportant ailleurs. Elle a été repérée dans plusieurs copies, sous des versions variées[1] (figure de gauche).

Démarche parfois menée avec des erreurs, comme dans cette figure (à droite), où les élèves ont bien une aire de 3, mais obtenue avec des allumettes de longueurs différentes.





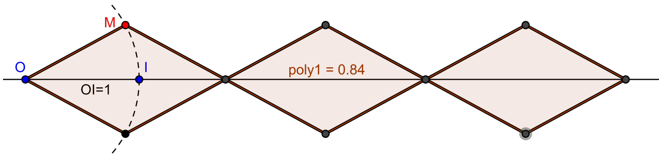
Sur le même principe, on peut trouver d’autres polygones qui conviennent (avec un carré et deux "chevrons") dont celui ci-contre qui a un axe de symétrie.

La seconde stratégie, qui fait intervenir l’utilisation du théorème de Pythagore, intègre la figure dans un rectangle 3x4, dont la diagonale est 5 (soit 5 allumettes). Elle a également été repérée plusieurs fois.

La troisième stratégie correspond à un polygone croisé. Il y a eu des débats entre les correcteurs concernant la définition de « polygone ». Wikipedia nous indique qu’en géométrie euclidienne, un polygone est une figure géométrique plane, formée d'une suite cyclique de segments consécutifs et qu’il peut être croisé si au moins deux côtés non consécutifs sont d'intersection non vide (http://fr.wikipedia.org/wiki/Polygone).

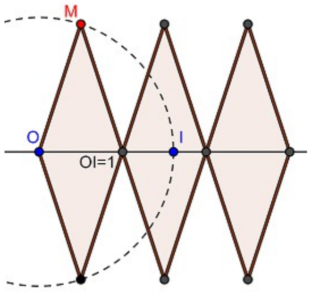
1 Les productions des élèves ont été photographiées lors de la correction. Par souci de lisibilité, nous les avons reproduites sous GeoGebra (en laissant, la plupart du temps, les tracés de construction « à la règle et au compas ».

De tels polygones ont souvent été rencontrés parmi les propositions validées à la correction, comme dans l'exemple ci-contre.



Malheureusement l'aire de la figure proposée par ces élèves n'était pas égale à 3...

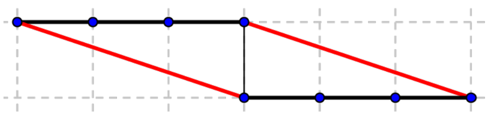
Ce schéma est cependant intéressant : ce polygone croisé fonctionne comme un « accordéon ». Lorsqu'il est très étiré, son aire se rapproche de zéro ; de même lorsqu'il est très « tassé ». Entre ces deux extrémités, l'aire passe donc par un maximum. On peut facilement démontrer que ce maximum est obtenu lorsque les losanges sont carrés.



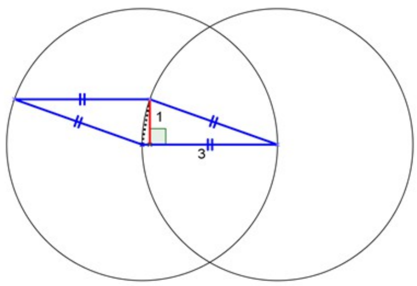
Cet « accordéon » n'évoque-t-il pas les « dessous de plat » de nos grand-mères ou les [pantographes]?

Une petite note pour les utilisateurs de GeoGebra : la commande « Aire » calcule l'aire du polygone défini par les points donnés *A*, *B*, *C*,… (aire algébrique – donc attention si vous avez un polygone croisé !) : http://wiki.geogebra.org/fr/Commande_Aire

Avec un périmètre de 12, on pouvait également penser (tout naturellement ?) à un losange de côté 3. Mais encore fallait-il que son aire soit bien égale à 3. Certains ont bien trouvé des losanges de côté 3, mais pas d'aire 3 ; d'autres des « pseudo-losanges » tels celui dessiné ci-dessous : il est composé de deux triangles rectangles 3x1 … malheureusement deux des côtés sont un peu trop longs.

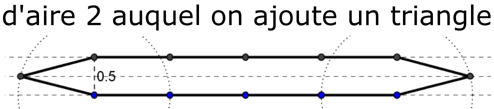


Voici (à droite), une des méthodes permettant d'avoir un « bon » losange.

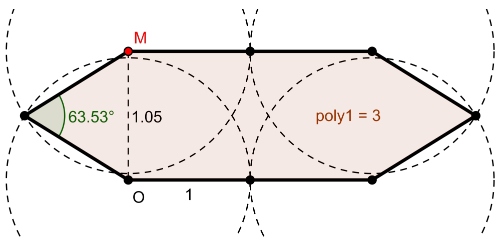


Nous allons étudier quelques autres propositions auxquelles les correcteurs n'avaient pas pensé a priori.

La première est un rectangle d'aire 2 auquel on ajoute un triangle à chaque extrémité :



Malheureusement on obtenait ainsi une aire de 2 ½ et non 3...

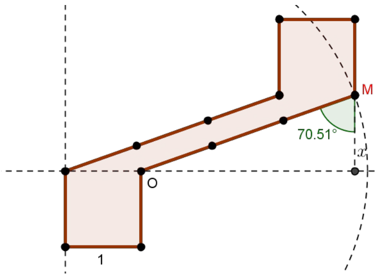


Mais nous nous en sommes inspirés pour vous proposer cette autre figure :Elle a été obtenue par « tatonnement » avec GeoGebra : le point M est mobile sur la perpendiculaire à la base ; on le fait glisser sur cette droite jusqu'à ce que l'aire affichée soit égale à 3.

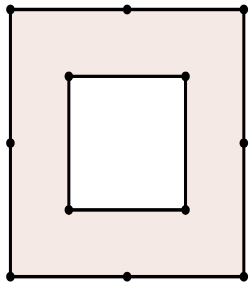
On pourrait obtenir la longueur x = OM par des calculs algébriques ou

retour au sommaire

trigonométriques, mais c'est assez ardu, et pas du tout à la portée d'élèves de troisième ou de seconde. Voir en annexe.



Une avant-dernière solution, très originale.
Les élèves ont eu l'idée de joindre deux carrés de côté 1 par une bande oblique (un parallélogramme) d'aire 1.
Ces élèves ont utilisé le fait que le cosinus de l'angle (que nous avons mis en vert sur la figure) valait 1/3, donc que l'angle valait environ 70,5°.
Toutes nos félicitations !

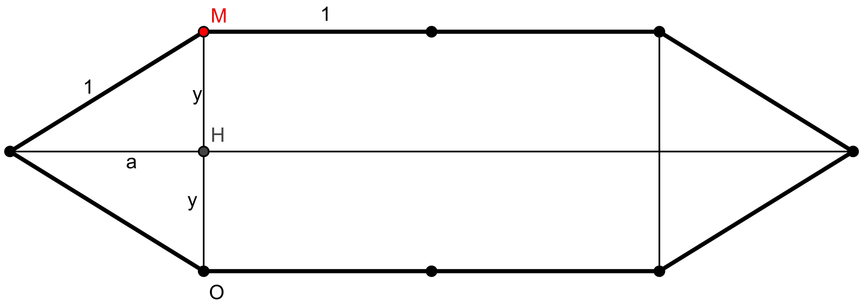


Nous terminons cette analyse de productions de classes par une proposition qui n'entre pas dans la définition d'un polygone trouvée dans Wikipedia, mais qui pour les élèves était sans doute l'utilisation d'un polygone « troué ». Puissent les compléments aux programmes actuellement en discussion fournir des définitions des objets mathématiques à enseigner dans l'enseignement secondaire…

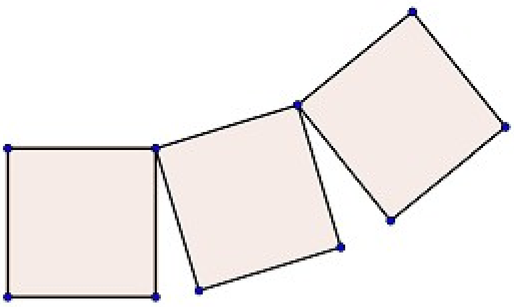
Par ailleurs, certains élèves avaient coupé les allumettes en morceaux pour arriver à leurs fins. Leurs réponses n'ont pas été validées !

Annexe

Résolution de l'équation algébrique correspondant à la figure du bas de la page précédente.



D'après le théorème de Pythagore, $y^2+a^2=1$, soit $a=\sqrt{1-y^2}$.
L'aire du grand rectangle vaut $2\times 2y=4y$.
L'aire des deux triangles latéraux vaut $2\times(a\times y) = 2y\sqrt{1-y^2}$
On est donc amené à résoudre l'équation $4y+2y\sqrt{1-y^2} = 3$, ce qui dépasse nos capacités.
Une bonne calculatrice « haut de gamme » nous en donne une solution approchée : $y\approx 0{,}52626$, ce qui confirme la valeur obtenue par tâtonnement avec GeoGebra.



« *Ceci n'est pas un polygone* »
Tout le monde est-il d'accord avec cette proposition ?

retour au sommaire