MATHS ET ARTS

Hardy's taxi

par Walter Nurdin
ÉSPÉ de Lorraine, site de Nancy

En 2008, l'université de Bayreuth, située en Bavière, a proposé à Eugen JOST, artiste suisse dont le travail est fortement influencé par les mathématiques, de concevoir un calendrier.
Eugen JOST a donc composé 12 tableaux et les a réunis dans un calendrier dont le titre générique est « Alles ist zahl [1]» (Tout est nombre).
Au travers de ses œuvres Eugen JOST veut montrer que les mathématiques ont « *beaucoup à voir avec la créativité et sont belles* ».
À la rentrée, l'un de ses tableaux sera un fil rouge des enseignements que je peux dispenser.
Les éléments détaillés du tableau vont permettre de faire évoluer des représentations, d'introduire des notions et d'illustrer des problèmes.
Le plus exhaustif pour tenir ces différents rôles est celui du mois de mars.

Voici, ci-dessus, la première version de 2008.

En raison du succès du calendrier de 2008, une deuxième version est réalisée en 2010.

Les deux versions sont mathématiquement riches. On y retrouve des éléments en commun (diverses représentations des nombres, des nombres triangulaires, des carrés, …), des compléments (1089 détaillé...) et d'autres notions (carré magique …). La version 1 illustrant des problèmes qu'il m'arrive déjà de proposer est celle que je vais présenter.

Première utilisation : Les mathématiques développent l'imagination

La première phrase que l'on trouve dans le bandeau d'introduction des enseignements en mathématiques des programme de 2008 est :

« L'apprentissage des mathématiques développe l'imagination... »[2].

Les étudiants, par leur passé et leur ressenti des cours de mathématiques, sont généralement surpris que le premier terme proposé par l'institution pour caractériser les premiers apprentissages en mathématiques soit « l'imagination ». Pour eux, les mathématiques riment avec algorithmes, recettes disent-ils, souvent rigueur, mais singulièrement pas imagination.

1 http://mathematik-kalender.uni-bayreuth.de/index.php?id=2784
2 Page 18 BO n°3 du 19 juin 2008.

retour au sommaire

L'auteur, Eugen JOST, va apporter un éclairage complémentaire à cette phrase institutionnelle. Celui d'un artiste et non plus uniquement de fonctionnaires « à la solde » des mathématiques, fussent-ils rédacteurs de programmes !

Eugen JOST voit dans les mathématiques « *un champ infini dans lequel il peut jouer comme artiste* »[3]. Dans le même entretien il affirme qu'il voit partout où il regarde des mathématiques et de la *« belle géométrie »*. Comme observer c'est orienter un regard, suivant le public, on peut illustrer cette phrase en présentant pour la maternelle des albums (Alphabetville de Stephen T. Johnson édition circonflexe et son détournement d'objets de notre quotidien ; Au lit dans 10 minutes de Peggy Rathmann de « l'École des loisirs » et ses petits personnages à l'intérieur de la BD...), pour les primaires les Kolams du sud de l'Inde, les dessins d'ESCHER (« Je fais les maths autrement » page 114)[4] et même les fractales (« Euro math » CM2 page 126)[5] enfin pour le secondaire les innombrables activités que l'on trouve dans la rubrique « Activités en classe » du « Petit Vert ».

Deuxième utilisation : Des mathématiciens de chair et d'os

Le titre du tableau, « Hardy's taxi », va permettre de donner vie à deux mathématiciens de premier plan.
L'un est nommé dans le titre, c'est Hardy Godfrey Harold (1877-1947), le second est masqué dans « taxi ». Hardy, dans son livre sur Ramanujan, nous donne la clé. Il raconte[6] qu'en rendant visite à l'hôpital à un ami malade il avait pris un taxi dont le numéro était 1729. Ne trouvant aucune caractéristique particulière à ce nombre, il y voyait un mauvais présage. Cependant pour alimenter la conversation il le confia à son ami qui lui répondit que 1729 était tout de même le plus petit entier naturel qui pouvait s'exprimer comme la somme de 2 cubes positifs non nuls de deux façons différentes. L'ami alité était en fait Ramanujan Srinivasa (1887-1920) le génial mathématicien.
Le tableau peut ainsi nous permettre d'évoquer la vie de deux grands mathématiciens.
De surcroît, quasiment tout les oppose ; toutefois les mathématiques vont les réunir.

<u>La culture</u>

• Hardy est anglais, athée, né dans une famille aisée où le père est économe à « Cranleigh école » et la mère professeur au Collège de formation pour les enseignants « Lincoln ». L'athéisme de Hardy s'illustre dans cette anecdote à l'humour tout britannique. En revenant par bateau de Scandinavie, un jour de tempête, il écrit une lettre à un collègue affirmant qu'il venait de démontrer l'hypothèse de Riemann. En agissant ainsi, il avançait que Dieu, qu'il nommait « son pire ennemi », ne pouvait pas le faire mourir en laissant croire un tel mensonge. On n'est guère éloigné d'une démarche inverse du pari de Pascal.

• Ramanujan est indien, pratiquant, né dans une famille de brahmanes pauvre et orthodoxe. Il n'a pas toujours mangé à sa faim. La piété de Ramanujan est parfois discutée car elle l'autorise à dire que « toutes les religions lui semblent également vraies » mais pour Ramanujan « une équation n'a aucune signification, à moins qu'elle ne représente une pensée de Dieu. »

<u>La formation</u>

• Hardy suit une formation mathématique classique, tout d'abord dans l'école de son père, puis ensuite au Trinity Collège à Cambridge. Bien installé dans la communauté scientifique, il obtient deux grandes distinctions, la médaille Sylvester et Copley. Il rejoint ainsi Poincaré, Cantor pour la première et Einstein pour la seconde.

3 http://press.princeton.edu/releases/m10065.html
4 http://www.images.hachette-livre.fr/media/contenuNumerique/029/2570989278.pdf
5 http://lewebpedagogique.com/cm1cm2sensive/files/2013/07/euromaths_cm2_ldp_2010-livre-du-professeur.pdf
6 http://mathworld.wolfram.com/Hardy-RamanujanNumber.html

retour au sommaire

• Ramanujan est un autodidacte qui apprend les mathématiques à partir de deux livres. Un livre de trigonométrie et un livre contenant 6000 théorèmes sans démonstration[7]. Les récompenses viendront après sa mort.

Le caractère

• Hardy est certes timide mais collabore, entre autre avec Littlewood et Ramanujan. Il encadre des étudiants, Turing est son élève et pilote une réforme des mathématiques en les orientant vers plus de rigueur et surtout vers l'étude des mathématiques pures. En cela il se démarque de son illustre prédécesseur, Newton, qui avait entraîné les mathématiciens anglais vers les mathématiques appliquées.

• Ramanujan, en bon autodidacte, reste lui très autonome et d'après P.C.Mahalanobis[8] n'a pas d'idée réformiste.

La rencontre entre Hardy et Ramanujan est inhabituelle, voire unique. Pensant être incompris en Inde, Ramanujan envoya en 1913 une lettre[9] à Hardy où il lui présentait une liste de formules et de théorèmes sans démonstration[10], calquant en cela la présentation de son livre initiatique. Hardy crut tout d'abord à une supercherie, mais en discutant avec Littlewood, il comprit qu'il avait à faire à un mathématicien de premier plan. Il le fit venir en Angleterre en disant qu'il « avait autant de génie naturel que Gauss ou Euler ». Hardy qui s'amusait à noter les mathématiciens donnait la note de 85/100 à David Hilbert et 100/100 à Ramanujan.
Pour faire « people » on peut raconter qu'Hardy détestait se voir. Il enlevait donc tous les miroirs de ses différentes habitations. A l'hôtel, il demandait des torchons pour les couvrir.

Le voici :un petit air d'un célèbre « fab four »

Pour rester dans le même registre Ramanujan ne se savait peut-être pas végane, mais au moins végétarien comme sa communauté de pensée l'exigeait.

Vie familiale

• Hardy ne s'est pas marié. Selon son ami Littlewood, il est « un homosexuel non pratiquant ». Pour comprendre son « choix » on peut repenser à la vie de Turing, son élève, ayant tenté l'autre alternative. Cependant il ne restera par seul, sa sœur s'occupera de lui sur la fin de sa vie. Il meurt à 70 ans à Cambridge.

• Pour qu'il s'assume, la famille de Ramanujan le marie à 22 ans à Janaki Ammal, une jeune fille de 9 ans. Après le mariage elle restera avec ses parents et le rejoindra 3 ans plus tard, Ramanujan ayant obtenu un premier emploi[11]. En 1984, on retrouve Janaki Ammal qui remercie un mathématicien japonais vivant à Baltimore pour avoir contribué à l'édification d'une sculpture à l'hommage de son mari [12]. De santé fragile enfant, Ramanujan attrape la

7 http://heybryan.org/docs/A_Synopsis_of_Elementary_Results_in_Pure.pdf
8 http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/newnow/pcm5.htm
9 http://laregionale.com/7-science_tech/2014/06/28/1239/c
10 https://vimeo.com/98435482
11 http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/newnow/janaki.pdf
12 http://laregionale.com/7-science_tech/2014/06/28/1239/c

retour au sommaire

variole, plus tard une amibiase hépatique. Il enchaîne les séjours à l'hôpital et dans les sanatoriums. Dépressif, il fait même une tentative de suicide en Angleterre en se jetant devant un métro. Il meurt en Inde à l'âge de 32 ans.

Écrits scientifiques

Les mathématiques ont réuni les deux amis, plus particulièrement la théorie des nombres. Leurs collaborations sont innombrables et importantes.
Nombreux sont encore les mathématiciens qui travaillent sur les formules, données sans démonstration, tirées des carnets[13] de Ramanujan.
Ramanujan a, en autre, une constante qui porte son nom, un théorème, des fonctions, des nombres premiers et laisse plus de 6000 formules dont la fameuse liste exhaustive des 55 formes quadratiques universelles.[14]
Un travail en commun de Hardy et de Ramanujan a permis à Hardy et Littlewood d'obtenir une méthode pour compter exactement le nombre de « points entiers » à l'intérieur d'un cercle. Méthode qui sera reprise dans la démonstration par Wiles du théorème de Fermat.
Hardy a donc donné son nom à une méthode, à un théorème, à une loi mais également à un espace.
Hardy est également connu par les non-mathématiciens par un livre, considéré comme l'un des meilleurs essais sur la pensée d'un mathématicien au travail : « A mathematician's Apology »[15].
Dans cet écrit Hardy prône la recherche des mathématiques qui ne servent à rien sinon à la beauté. Pour lui un « mathématicien, comme un peintre ou un poète, est un créateur de motifs ».[16] Ironie du destin, Hardy a découvert, au début de sa carrière, en même temps que Weinberg, une loi qui porte leurs noms. Cette loi décrit l'équilibre génétique au sein d'une population et a été très importante pour l'étude des facteurs Rhésus des groupes sanguins.[17]
Hardy et Ramanujan se différenciaient également par leurs méthodes de recherches en mathématiques.
Hardy, aidé par sa formation, était rigoureux, méthodique, travaillait par déduction.
Ramanujan n'ayant pas cette culture procédait par induction. Littlewood écrivait :
« *Il (Ramanujan) ne possédait peut-être pas du tout l'idée de ce qui est signifié par une démonstration, notion si familière aujourd'hui qu'elle est considérée comme acquise ; si un bout signifiant de raisonnement lui venait quelque part à l'esprit, et que, globalement, le mélange entre intuition et évidence lui donnait quelque certitude, il n'allait pas plus loin.* »[18].

Les deux compères, Hardy et Littlewood ont bien tenté d'apprendre à Ramanujan à démontrer tout en craignant de perturber son intuition géniale, mais en vain. Le temps a peut être manqué et le fallait-il ?

Voyons maintenant le tableau.

Troisième utilisation : Les symboles

Le premier qui peut sembler incongru dans le tableau est : 
Peut être qu'Hardy était également brasseur ?

On peut actuellement encore voir cette représentation aux anciennes brasseries de Maxéville. L'air (l'un des sommets) et l'eau (un autre sommet) permettent la germination (3ème sommet). L'eau et la chaleur (4ème sommet)

[13] http://www.futura-sciences.com/magazines/mathematiques/infos/actu/d/mathematiques-mathematiques-mysterieuses-formules-dues-ramanujan-enfin-elucidees-10460/
[14] http://www.futura-sciences.com/magazines/mathematiques/infos/actu/d/mathematiques-mathematiques-mysterieuses-formules-dues-ramanujan-enfin-elucidees-10460/
[15] http://www.math.ualberta.ca/mss/misc/A%20Mathematician's%20Apology.pdf
[16] G. H. *Hardy, A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, New York, 1940, p. 13
[17] https://perso.univ-rennes1.fr/jean-christophe.breton/agreg/.../hardy.pdf
[18] http://pi.ac3j.fr/srinivasa-ramanujan/

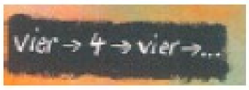
vont donner la saccharification (5ème sommet). Enfin, la chaleur et l'air autorisent la fermentation (6ème sommet).

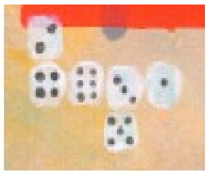
Il est plus probable que le symbole qui est sur une diagonale à l'opposé du fameux 1729 de Ramanujan soit un symbole Hindou pour rappeler sa piété.

Un hexagramme étoilé porté par Vishnu →

← Des points, des mains, des mots, un dix romain, la constellation du dé, des nombres triangulaires, des nombres écrits et même une flèche d'affectation que l'on utilise en algorithmique. Il restera à introduire Picbille[19] et la carte à points[20] et d'autres numérations pour les étudiants préparant le concours de professeur des écoles.

On trouve ainsi dans le tableau des nombres écrits en langue numérale (vier, forty) et dans des langues numériques différentes (4, X...). Notions que l'on enseigne à l'ÉSPÉ pour montrer les difficultés d'un apprentissage qui débute en maternelle. D'autant plus que les nouveaux programmes[21] proposent des démarches qui diffèrent des instructions officielles de 2008.





On trouve d'autres symboles : 

On peut envisager pour ces deux lettres reliées une interprétation littéraire. Allez de l'alpha (début), première lettre de l'alphabet grec classique, à l'oméga (fin), dernière lettre, de toute recherche est l'objectif ultime du chercheur mais également de tout apprenant.
Autre interprétation : les mathématiques et plus précisément la théorie des nombres, objet de recherche des deux inspirateurs de l'auteur, utilisent la lettre alpha dans le cadre des problèmes de diviseurs. L'oméga intervient pour noter en théorie des ensembles des nombres ordinaux infinis. Un indice est ajouté pour différencier les « infinis ». Il n'est pas inutile de l'évoquer car il m'est arrivé, en CM2, d'entendre un élève qui venait de comprendre qu'il y avait « tout plein » (une infinité précisa l'enseignant) de nombres décimaux entre 1 et 2 s'exclamer : « Alors entre 1 et 3 il y a deux fois plus d'infinis ! » (École d'application « Faubourg des trois maisons » à Nancy).

Le symbole « l'ouroboros », serpent ou dragon qui se mord la queue, peut lui aussi avoir plusieurs interprétations. Une première directement liée aux nombres qui lui sont

proches :
Nous avons ici une suite de Robinson[22] (en commençant par 0) qui se lit ainsi : Pour le premier nombre dans cette liste on a 1 chiffre 0 (10), puis 3 chiffres 1 (31), 2 chiffres 2 (22), 3 chiffres 3 (33) et enfin 1 chiffre 4 (14). En concaténant les chiffres on obtient bien : 1031223314.

[19] http://eleduc1.free.fr/des_jeux_en_ligne.htm
[20] http://jean-luc.bregeon.pagesperso-orange.fr/Page%208.htm#Représentation
[21] http://www.education.gouv.fr/cid87300/rentree-2015-le-nouveau-programme-de-l-ecole-maternelle.html
[22] lyceeplainedelain.fr/ISN2014/cours_python/listes/listes_exercices2.html

En reprenant le lien de la suite de Robinson il reste à déterminer le début qui permet d'obtenir le point fixe : 10 21 32 23

Pour enrichir les liens on peut rappeler la présence du même symbole dans la déclaration des droits de l'homme et du citoyen. Le sens inversé semble fortuit contrairement à la svastika, symbole que l'on retrouve historiquement sur tous les continents.

Si on reste sur le premier extrait on observe que 10 est privilégié : Les deux mains, le dix romain, les doubles 5 barrés. La somme des nombres verticaux 1+2+3+4+5 fait également 10. Cette universalité doit être précisée. Ainsi d'autres bases historiquement connues peuvent être évoquées. Mais en restant dans la sphère de connaissances des élèves on peut montrer que dans la désignation de nos nombres (Quatre-vingt-cinq), dans la vente de certains aliments (œufs, huitres...) et dans certaines institutions (l'hôpital des Quinze-Vingts, 300 lits dans le système vicésimal) d'autres bases interviennent. De nombreux problèmes de compréhension, de traduction de textes anciens peuvent être proposés.

En revenant sur l'égalité à 10 de 1+2+3+4+5 on peut l'étendre à la question de la somme des 100 premiers nombres et à la formule associée. Formule que l'on utilise parfois dans le concours CRPE.
On observe également que 10 est somme de trois nombres triangulaires. Peut-on le faire avec 11,12,13 … ? La recherche d'autres exemples peut se poursuivre en primaire.
La démonstration de la conjecture de Fermat qui affirmait que tout nombre peut s'écrire comme somme de trois nombres triangulaires sera proposée aux stagiaires de Master 1 parcours mathématiques.[23]

On retrouve ces nombres figuratifs triangulaires à d'autres endroits. A côté, l'écriture conventionnelle →

Ces nombres désignent des nombres parfaits →

On peut ainsi travailler sur la construction d'un arbre des diviseurs et obtenir la formule donnant le nombre de diviseurs d'un entier. On la vérifie dans →

Cette formule s'obtient en observant l'arbre des diviseurs et le nombre de diviseurs est : si $n=p^a q^b r^c$ alors le nombre de diviseurs est $(a+1)(b+1)(c+1)$. Ici $8=2^3$ alors 8 possède (3+1) »4 diviseurs.

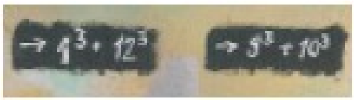
On peut observer comme Pythagore que les nombres parfaits écrits sont la somme d'une série arithmétique. Euclide démontra que $2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait si $2^p - 1$ est premier. Euler démontra que tout nombre parfait pair est de la forme proposée par Euclide. L'utilisation de l'ordinateur pour trouver des nombres parfaits[24] a permis d'en trouver, à ce jour, 48.

23 http://www.apmep.fr/IMG/pdf/S_e9rie_4-1_Calculus.pdf
24 capesinterne.free.fr/PLC1/fichiers/doc/arith-parfaits.doc

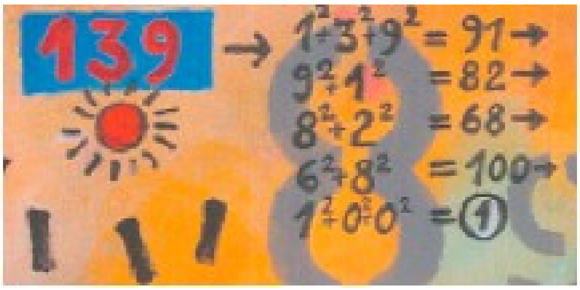
retour au sommaire

Ce nombre trouve son explication dans la version 2 du tableau.

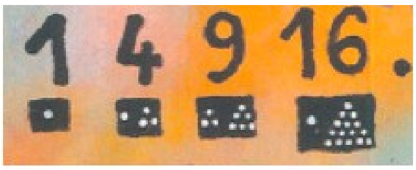
Cet exercice figure également dans un livre de l'école primaire. On prend un entier naturel à trois chiffres (541). On le retourne (145). On fait la différence entre le plus grand et le plus petit (541-145=396). Puis on ajoute ce nombre et son retourné (396+693). Vous avez compris, on obtient 1089. En primaire, des exemples et un travail sur les décompositions pour indiquer les compensations vont suffire.

est justifié par


C'est un nombre de Ramanujan . C'est le plus petit entier naturel qui peut s'exprimer comme la somme de deux cubes de deux façons différentes. Le suivant est 4104. Un programme aidera à les trouver. Les mathématiciens ont généralisé la recherche et en hommage à Ramanujan ont nommé Taxicab(*n*) le plus petit nombre entier naturel qui peut être exprimé comme somme de deux cubes positifs non nuls de *n* façons différentes à l'ordre près. Ainsi Taxicab(2)=1729.[25]



L'extrait ci-contre illustre un exemple d'une suite de Prabekhar. On se donne un nombre. On calcule la somme des carrés de ses chiffres et on itère la procédure. Il s'avère que tous les nombres vont aboutir soit à 1, soit entrer dans le cycle infini 4-16-37-58-89-145-42-20.[26]
La démonstration est riche puisqu'elle débute par des essais, des conjectures et suivant la démarche scientifique privilégiée un travail d'une recherche d'algorithme suivi/précédé d'une démonstration par récurrence.



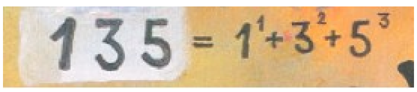
On peut voir sur cet exemple une illustration d'une propriété des nombres triangulaires. Tout carré est somme de deux nombres triangulaires. On peut même démontrer que tout carré est somme de deux nombres triangulaires consécutifs et réciproquement.

Un carré qui est somme de trois cubes :
on peut étendre la recherche aux carrés somme de quatre cubes.

123 a la particularité que la somme de ses chiffres est égale au produit de ses chiffres.

22, 123, 1124, 11125, 11133, 11222 et les nombres que l'on peut obtenir en permutant les chiffres sont les seuls inférieurs à 100 000 qui réalisent la condition.

On peut construire avec ces nombres des fractions amusantes : $\frac{2+2}{2\times2}=\frac{1+2+3}{1\times2\times3}$



On peut montrer par disjonction des cas que les nombres à 3 chiffres qui possèdent cette propriété sont : 135, 175, 518 et 598.

[25] http://www.christianboyer.com/taxicab/
[26] www.faidherbe.org/~bkostrzewa/mej/contre-rendu-mej-1.pdf

retour au sommaire

Il existe 10 nombres supérieurs à 10 qui vérifient cette propriété. On démontre en premier lieu qu'ils sont inférieurs nécessairement à un nombre et un ordinateur permet de les trouver tous.

Les triplets pythagoriciens sont présents : Les cinq paquets de 5 sont visibles sur le côté en conservant la disposition de la constellation du dé. On travaille ainsi l'extraction d'une figure simple dans une figure complexe.

Pour finir, voici un symbole universel : 

On le retrouve inclus dans un carré magique dans la version 2 du tableau.
On sait, et on peut le faire retrouver, que la somme par ligne, par colonne et en diagonale vaut 15. La deuxième colonne permet de montrer que le « soleil » vaut 1. On a vérifié auparavant que les points de la première ligne valent bien 9.

Bien évidement un travail pluridisciplinaire peut apporter d'autres analyses. Le symbolisme, les choix artistiques peuvent être développés. Je me suis contenté, pour l'instant, de l'approche mathématique.

« Il n'y a pas de place durable dans le monde pour les mathématiques laides »
Godfrey Harold Hardy[27]

⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂

Réforme du collège

Le compte rendu de la commission collège de l'APMEP, qui s'est réunie le 26 septembre dernier, est en ligne sur http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Cpte_rendu_Cc_15_09_26-1.pdf.

Vous pourrez lire également la position du bureau national de l'APMEP sur cette réforme ici : http://www.apmep.fr/A-propos-de-la-reforme-du-college (en date du 27 mai 2015)

N.B. Les programmes "officiels" devraient être parus au B.O. avant la fin novembre.

⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂

[27] G. H. *Hardy, A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, New York, 1940, p. 14

retour au sommaire