SOLUTION DU PROBLEME n°116

Rappel de l'énoncé : Soit n points sur un cercle ($n \geq 4$). A chacune des $\binom{n}{3}$ 3-parties de l'ensemble de ces points, on associe l'orthocentre H_k du triangle formé par ces 3 points et le centre de gravité G_k des n - 3 autres points. Montrer que les $\binom{n}{3}$ droites (H_kG_k) ainsi obtenues sont concourantes en un point que l'on précisera.

Solution de Jacques Choné, auteur du problème

Sans perte de généralité, on peut supposer que les points donnés sont sur le cercle unité du plan complexe d'origine O et les identifier à leurs affixes.

Soit A, B, C trois de ces points et H l'orthocentre du triangle ABC.

Comme $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, on a $H = A + B + C$.

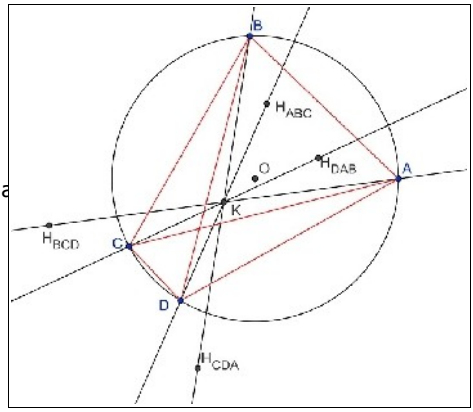
Soit G le centre de gravité des (n - 3) autres points. Alors (n - 3)G est égal à la somme (des affixes) de ces (n - 3) points. Donc $H + (n - 3)G$ est égal à la somme (des affixes) des n points donnés.

Soit K le barycentre de H affecté du coefficient 1 et de G affecté du coefficient (n - 3) [K est donc sur la droite (HG)], et Γ l'isobarycentre des n points donnés.
On a, d'après ce qui précède, $(n - 2)K = n\Gamma$.

Toutes les droites (HG) passent donc par le point K défini par $\overrightarrow{OK} = \frac{n}{n-2}\overrightarrow{O\Gamma}$.

D'où le résultat.

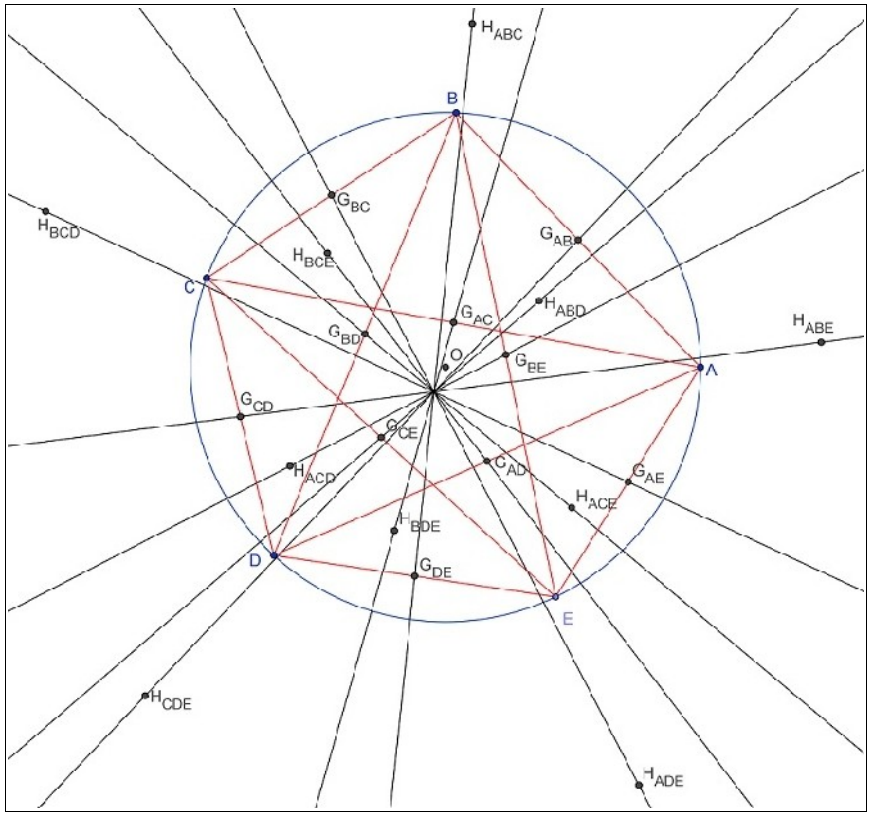
Remarque : il se peut que G et H soient confondus (par exemple avec n = 5, ABC équilatéral et D et E diamétralement opposés) ; dans ce cas, l'une au moins des trois droites n'est pas déterminée, mais cela n'invalide pas l'étude pour les autres droites.



N.d.l.r. : Nous avons illustré ci-contre le cas « particulier » n = 4.
Les quatre triangles déterminés par les points A, B, C et D sont en rouge, et leurs orthocentres respectifs H_{ABC}, H_{BCD}, H_{CDA} et H_{DAB} sont en noir.
Les quatre droites évoquées par l'énoncé sont concourantes en K.

Page suivante, le cas n = 5 points

retour sommaire



Avec 5 points, nous pouvons construire 10 triangles. Ils sont en rouge sur cette figure.
Prenons par exemple le triangle ABC (nous avons laissé de côté C et D). L'orthocentre de ce triangle est noté H_{ABC}. Le centre de gravité des points restants (en l'occurrence le milieu de CD) est noté G_{CD}. On trace la droite joignant H_{ABC} et G_{CD}.
On procède de même pour les 9 autres triangles, et on constate que les 10 droites sont concourantes.

retour sommaire

Problème du trimestre n°117

Les cent passagers d'un vol en avion — toutes les places ont été réservées — s'apprêtent à embarquer. Le premier à monter dans l'avion, un brin étourdi, s'assied au hasard. Les suivants s'installent ensuite à la place prévue par leur billet, à moins que celle-ci ne soit déjà occupée, auquel cas ils choisissent une place au hasard. Quelle est la probabilité que le dernier passager à entrer trouve sa place libre ?

Pour les fanas d'algorithmique, tout algorithme de simulation de cette situation sera également le bienvenu.

Rémi Peyre a rencontré ce problème (qui est un « classique ») lors d'un stage

Attaché et a intégré dans les TD qu'il donne à ses étudiants. Voir par exemple : http://www.normalesup.org/~rpeyre/pro/enseignement/td09pbas-e.pdf

En attendant la nomination d'un nouveau responsable de cette rubrique, envoyez toutes propositions de solutions ou de nouveaux énoncés à jacverdier@orange.fr

retour sommaire