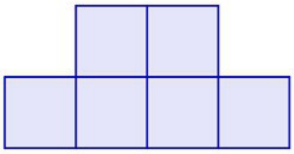
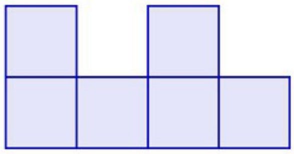
# SOLUTION DU DÉFI COLLÈGE n° 117

Rappel de l'énoncé : Essayez de construire, avec le moins de cubes possible, une forme géométrique en trois dimensions

dont la vue de face est :

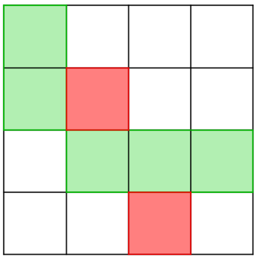


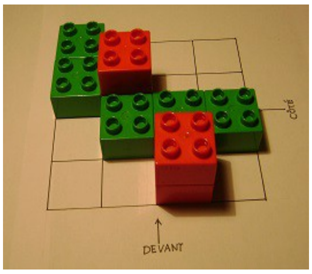
et dont une vue de profil est :

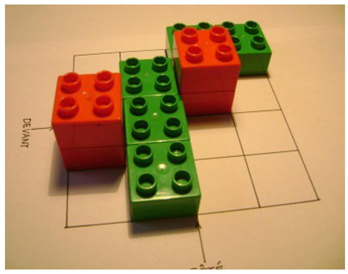


**Combien faut-il de cubes au minimum pour la réaliser ?**

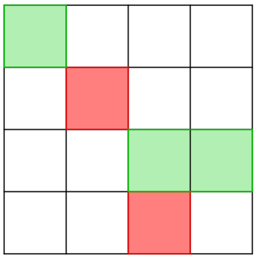
Une solution avec **9** cubes était assez facile à trouver. Nous vous donnons ci-dessous à gauche la vue de dessus, avec les conventions suivantes : ce qui est en vert correspond à un seul cube, et ce qui est en rouge à deux cubes superposés. Les deux images de droite sont une maquette en Lego (ici ce ne sont pas des cubes, mais des briques à base carrées, avec les mêmes conventions de couleurs).

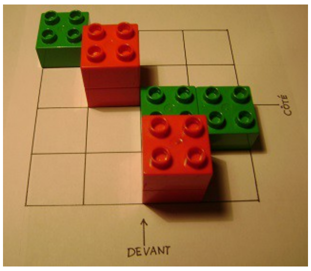


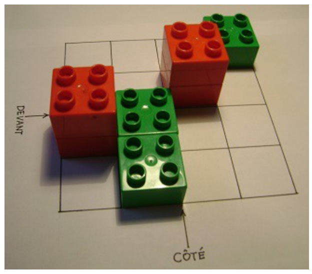


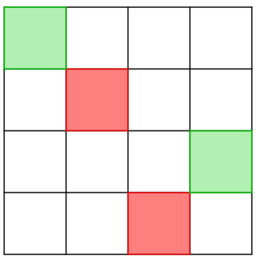
Mais on pouvait également trouver une solution avec seulement **7** cubes, dont certains ne sont contigus que par des arêtes (dans la solution ci-dessus, les cubes étaient contigus par au moins une face).

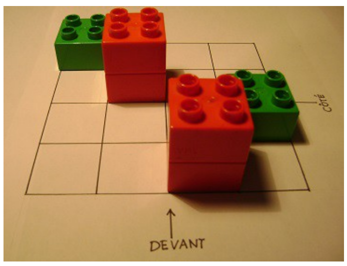


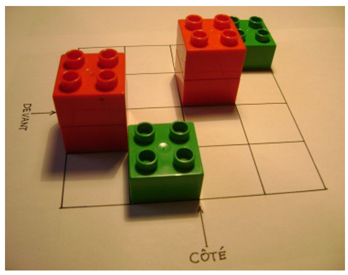



Mais on pouvait encore faire mieux, avec seulement **6** cubes. Cette fois, ils ne sont pas tous contigus (certains rétorqueront qu'il ne s'agit alors pas d'une « forme géométrique », mais derrière ce vocable on peut y mettre ce que l'on veut). Vérifiez, cela donne bien les vues de face et de côté demandées.






Par contre, on peut démontrer qu'il est impossible de trouver une solution avec moins de 6 cubes ... ni avec plus de 20 cubes.

retour au sommaire

# Solution du défi lycée n°117

Rappel de l'énoncé : Dans un jeu, dix personnes P1 , … , P10 tirent l'une après l'autre un billet dans un sac opaque qui contient vingt billets de 5 euros et un billet de 500 euros (ces billets sont indiscernables au toucher), et le gardent. Après chaque tirage, la probabilité que le billet de 500 euros soit encore dans le sac diminue ; pour éviter ce désavantage, P10 propose à P1 de lui donner 5 euros pour pouvoir tirer en premier, P1 tirant alors en dernier. P1 doit-il accepter ?

Remarque préalable : l'hypothèse « ces billets sont indiscernables » au toucher est importante ! Si, par exemple, le billet de 500 € était "plus facile à tirer" que les autres (par ex. parce qu'il est plus large), tout ce qui suit serait caduc.

**Si P1 tire en premier :**

Il a une proba 1/21 de gagner 500 et 20/21 de gagner 5 (la suite du tirage n'a aucune incidence sur son gain).

Espérance de gain $E=\frac{1}{21}\times 500+\frac{20}{21}\times 5=\frac{200}{7}\approx 28{,}57$

**Si P1 tire en dernier :**

Pour gagner 500, il faut que les neuf joueurs passés avant lui tirent un billet de 5, et que lui tire le billet de 500.

Proba que les neuf premiers joueurs tirent 5 : $\frac{20}{21}\times\frac{19}{20}\times\ldots\times\frac{13}{14}\times\frac{12}{13}=\frac{12}{21}$

Proba que P1 tire le billet de 500 (sachant que les 9 premiers ne l'ont pas tiré) = 1/12 ; proba qu'il tire un billet de 5 = 11/12.

P1 a donc, dans le cas où aucun des neuf premiers n'a tiré le billet de 500, une proba $\frac{12}{21}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{21}$ de gagner 500 et une proba $\frac{12}{21}\times\frac{11}{12}=\frac{11}{21}$ de gagner 5.

Mais si un des neuf premiers a tiré le billet de 500, P1 gagne 5. Cet évènement étant complémentaire de l'évènement « les neuf premiers joueurs tirent 5 », sa probabilité est donc de 9/21.

L'espérance est de gain de P1 est donc $\left(\frac{1}{21}\times 500+\frac{11}{21}\times 5\right)+\frac{9}{21}\times 5=\frac{200}{7}\approx 28{,}57$

La probabilité de gagner est donc la même quelle que soit la stratégie de P1. Il a donc tout intérêt à accepter la proposition de P10 (même si P10 ne lui offre qu'une somme dérisoire).

**Et si on voyait les choses autrement ?**

En réalité, mais vous ne le savez peut-être pas, les billets sont des petits êtres surnaturels doués d'autonomie. Ce sont eux qui décident (de façon strictement aléatoire) dans quel ordre ils vont être tirés, et ils se débrouillent pour aller dans la main du joueur correspondant. « On » sait donc déjà, avant que les joueurs ne commencent, lequel aura le billet de 500. Il est alors évident que chacun des 10 joueurs a la même probabilité que les autres de « tomber » sur le billet de 500 : $\frac{1}{21}$ .

L'espérance de gain de chacun des joueurs est donc $E=\frac{1}{21}\times 500+\frac{20}{21}\times 5=\frac{200}{7}\approx 28{,}57$

On retrouve bien les espérances de gain données dans la solution ci-dessus.

Quelques commentaires de Rémi Peyre à propos de l'encadré précédent.

Oui, en effet, je pense que c'est la meilleure façon de voir les choses. Le point délicat est bien sûr de comprendre *pourquoi* il est effectivement licite de procéder ainsi. Je pense qu'il y a deux choses que j'estimerais important de mentionner :

- Cela ne change rien concernant nos joueurs d'imaginer qu'il y aura 10 personnes fictives qui continueront après eux de tirer les billets jusqu'au dernier, ce qui fait qu'on peut aussi bien imaginer que ce sont les billets qui choisissent chacun son joueur que l'inverse.
- Souligner la symétrie parfaite qui existe dans le problème entre les différents billets : il est bien clair qu'à l'échelle élémentaire, la probabilité que {le joueur n°1 tire le billet A, le joueur n°2 tire le billet B, ..., le joueur n°20 tire le billet T} est la même que la probabilité que {le joueur n°1 tire le billet M, le joueur n°2 tire le billet C, ..., le joueur n°20 tire le billet J}, et de même pour n'importe quelle permutation. Par conséquent, une fois qu'on ajoute ces possibilités élémentaires, la probabilité que le gros billet se retrouve dans la main du joueur n°1 est la même que celle qu'il se retrouve dans la main du joueur n°10.

retour au sommaire

# DEFI COLLEGE n° 118

## Le Diable et le Fainéant

Un Fainéant se désespérait d'être toujours sans le sou. Ne sachant plus à quel saint se vouer, il eût l'idée d'invoquer le Diable. A peine avait-il prononcé son nom qu'il le vit apparaitre. Dominant son effroi, le Fainéant demanda à son visiteur une recette pour faire fortune.

« C'est enfantin, répondit le Diable. Il suffit de traverser plusieurs fois le pont que tu vois là-bas. Après chaque traversée, tu te trouveras avec, dans ta poche, deux fois plus d'argent qu'auparavant.

- Pas possible s'exclama le Fainéant.

- Je m'en porte garant, affirma le Diable. Mais attention ! Il y a une condition : pour me payer de ma peine, tu me donneras 24 euros au terme de chaque traversée miraculeuse. Entendu ?

- Entendu, répondit le Fainéant, enthousiasmé à l'idée de faire si facilement fortune. Commençons sur le champ ! »

Le Fainéant traversa donc le pont une première fois et, ô stupeur, constata qu'il avait dans sa poche le double de la somme qui s'y trouvait auparavant. Ravi, il s'empressa de donner 24 euros au diable et de traverser le pont une seconde fois. Il put s'assurer de nouveau que le diable n'avait pas menti : son argent avait encore doublé. Il remit 24 euros au diable et fit une troisième traversée, au terme de laquelle, l'argent ayant doublé une nouvelle fois, il se retrouva avec exactement… 24 euros en poche, juste de quoi payer son perfide conseiller qui disparut en ricanant.

**Combien le Fainéant avait-il d'argent initialement ?**

# DÉFI LYCÉE n° 118

## Piles de crêpes

Un cuisinier, qui n'a pas le compas dans l'œil, fait des crêpes et les pose au fur et à mesure sur un plateau. Malheureusement, ses crêpes ne sont pas toutes de la même taille. Une fois qu'il a constitué sa pile de crêpes (ou pourra supposer qu'il y en a *n*), comment faire pour les ranger dans l'ordre, de façon que la plus grande soit en bas de la pile et la plus petite en haut ?

Pour cela, on dispose uniquement d'une fine spatule, que l'on peut glisser sous une des crêpes, et l'on retourne d'un coup tout le paquet de crêpes qui est posé au-dessus de la spatule.

Le premier défi est le suivant : **écrire un algorithme permettant de trier la pile de crêpes**. On notera glisserretourner(*k*) la procédure qui permet de retourner les *k* crêpes du haut de la pile.

Le second défi est un peu plus complexe : on a constaté que les crêpes réalisées par le cuisinier avaient toutes une face plus grillée que l'autre. On veut, toujours en utilisant la seule procédure glisserretourner(*k*), faire en sorte que non seulement les crêpes soient rangées en ordre de taille, mais qu'elles aient toutes la face la moins brûlée sur le dessus. Écrire l'algorithme correspondant.

**N.B. « Travaux pratiques » : on pourra vérifier que l'algorithme « fonctionne bien » en construisant des crêpes dans du carton épais !**

retour au sommaire