Solution du problème n° 117

Rappel de l'énoncé : *Les cent passagers d'un vol en avion - toutes les places ont été réservées - s'apprêtent à embarquer. Le premier à monter dans l'avion, un brin étourdi, s'assied au hasard. Les suivants s'installent ensuite à la place prévue par leur billet, à moins que celle-ci ne soit déjà occupée, auquel cas ils choisissent une place au hasard. Quelle est la probabilité que le dernier passager à entrer trouve sa place libre ?*

Nous avons reçu qu'une seule solution (de Jacques Choné), et deux programmes de simulation, l'un en Maple (de Jacques Choné) , l'autre en Python (de Gilles Waehren, qui nous a également fourni l'algorithme).

La solution du problème : Généralisons le problème à *n* passagers. On note E_n l'événement étudié et p_n sa probabilité dans l'univers dans lequel il y a *n* passagers. Et on note P_n la fonction probabilité dans ce même univers.

On a évidemment $p_1=1$ et on va montrer que pour tout $n\geq 2$, on a $p_n=\frac{1}{2}$.

On peut supposer, sans perte de généralité, que les billets des passagers qui entrent successivement soient numérotés dans l'ordre $n\,,\ n-1,\ \ldots\ ,2,\ 1$.

E_n est alors l'événement : « le passager avec le billet 1, qui entre en dernier lorsqu'il y a *n* passagers, trouve sa place libre » (attention, l'univers change avec *n*) .

On note X_n la variable aléatoire uniforme sur $\{1,\ 2,\ldots\ ,n\}$ égale au numéro du siège occupé par le passager ayant le billet *n* (premier passager à entrer). On étudie l'événement E_n en le conditionnant par les valeurs que peut prendre X_n .

On a : $p_2=P_2(E_2)=P_2(X_2=1).P_2(E_2/X_2=1)+P_2(X_2=2).P_2(E_2/X_2=2)=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

La proposition annoncée est donc vraie pour $n=2$.

Soit *n* un entier au moins égal à 3. Supposons que pour tout $k\in\{2,\ldots,n-1\}$, on ait $p_k=\frac{1}{2}$.

On a : $P_n(E_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P_n(E_n/X_n=k)$. Or $P_n(E_n/X_n=1)=0$, $P_n(E_n/X_n=n)=1$ et, pour tout $k\in\{2,\ldots,n-1\}$, $P_n(E_n/X_n=k)=P_k(E_k)$ (ici il y a bien P_k car on a changé d'univers !). En effet (pour cette dernière égalité), si le passager ayant le billet *n* (premier passager à entrer) occupe le siège *k*, les passagers ayant les billets $n-1,\ n-2,\ \ldots\ ,k+1$ occupent leur places prévues et on se retrouve dans la situation (changement d'univers) où les passagers $k\,,\ k-1,\ \ldots\ ,1$ doivent se placer successivement, le premier passager à entrer choisissant une place au hasard.

On obtient donc: $p_n=P_n(E_n)=\frac{1}{n}\ \left(0+\sum_{k=2}^{n-1}p_k\ +1\right)=\frac{1}{n}\ \left(0+(n-2)\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}$,

ce qui termine la démonstration.

J. Choné nous faisait également savoir qu'il existait de nombreuses références à ce problème, et en particulier la solution « astucieuse » (elle ne nécessite donc aucun calcul) suivante, dont nous donnons une traduction :

Lorsque le dernier passager monte à bord, il n'y a que deux possibilités. Ou bien il s'agit de son siège, ou bien il s'agit de celui du premier passager. En supposant qu'aucune préférence n'a été exercée par les passagers montant à bord concernant l'un ou l'autre des deux (derniers) sièges, ils ont chacun la même probabilité de devenir le dernier siège non occupé, à savoir 50%.
(http://www.cut-the-knot.org/Probability/LostPass.shtml#solution)

retour au sommaire

Un algorithme correspondant à la situation :

Fonction remplissage () (retourne vrai ou faux)
Début
    avion ← liste des entiers de 1 à 100
    pass1 ← entier aléatoire entre 1 et 100
    retirer de avion l'élément pass1
    pour i **allant de** 2 **à** 100 **faire :**
        si i<100 **alors :**
            si i est élément de avion **alors :**
                retirer de avion l'élément i
            sinon :
                place ← entier aléatoire entre 1 et taille(avion)
                retirer de avion l'élément à l'indice place
            finSi
        sinon :
            retourner (i est élément de avion)
        finSi
    finPour
Fin

Un programme de simulation (en langage Python) :

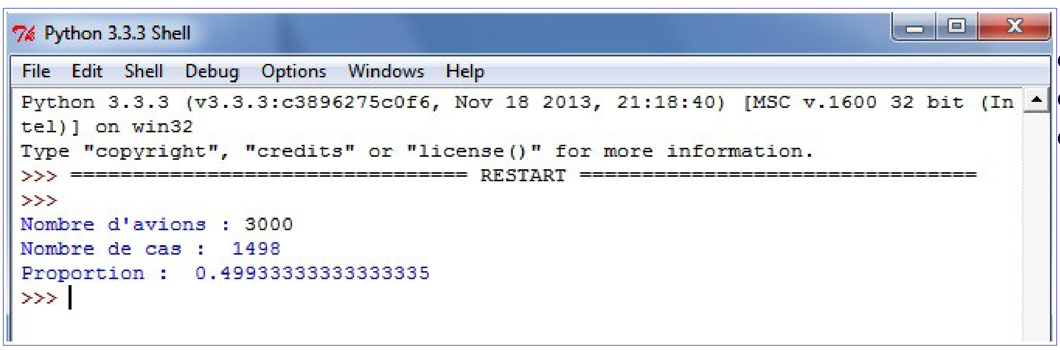
```python
from random import randint

def remplissage():
    avion=[]
    for i in range(1,101):
        avion.append(i)
    pass1=randint(1,100)
    avion.remove(pass1)
    for i in range(2,101):
        if i<100 :
            if avion.count(i) != 0:
                avion.remove(i)
            else :
                place=randint(0,len(avion)-1)
                avion.remove(avion[place])
        else :
            return avion.count(i)!=0


def echantillonnage(N):
    S=0
    for i in range(N):
        if remplissage():
            S+=1
    return S

N=int(input("Nombre d'avions : "))
eff=echantillonnage(N)
print("Nombre de cas : ",eff)
print("Proportion : ",eff/N)
```

qui donne les résultats suivants :



ce qui est conforme à ce qu'on attendait.

retour au sommaire

Problème du trimestre n°118

Problème de pesées proposé par André Stef

On dispose d'une balance de Roberval supposée équilibrée. Ce qui n'arrive bien sûr jamais, sauf en math (précision importante, car la pesée d'objets en physique, donc en "vrai" fait appel au "principe de double pesée". Si on vous fait le coup d'une simple pesée dans un commerce, appelez la police !).

On part donc en MATH du principe que si on place un objet sur chaque fléau de la balance, la balance est en équilibre si les deux objets ont même masse (donc même poids, ce que compare la balance), et penche sinon du côté de la masse la plus importante.

Problème connu : On a 9 boules identiques d'aspect mais une boule est plus lourde (mais non détectable "à la main"). Comment peut-on déterminer de manière certaine cette boule en 2 pesées (au plus) ?
Ce n'est pas la question du Petit Vert, vous pouvez cependant chercher ou regarder la producution d'un atelier MATh.en.JEANS sur le sujet (utile pour la suite) : http://mathenjeans.free.fr/adh/articles/2009/VillerslesNancy_2009/pesee_Villers_2009.pdf.

Variation : On a 12 boules identiques d'aspect mais une boule est de masse (et donc de poids) différente. Comment peut-on déterminer de manière certaine cette boule en 3 pesées (au plus) ?
Ce problème est également connu et vous pouvez vous préparer à la suite en cherchant une solution.

Question 1 : On a 13 boules identiques d'aspect mais une boule est de masse (et donc de poids) différente. Peut-on déterminer de manière certaine cette boule en 3 pesées (au plus) ?

Question 2 : On a 14 boules identiques d'aspect mais une boule est de masse (et donc de poids) différente. Peut-on déterminer de manière certaine cette boule en 3 pesées (au plus) ?

Question 3 : On a 15 boules identiques d'aspect mais une boule est de masse (et donc de poids) différente. Peut-on déterminer de manière certaine cette boule en 3 pesées (au plus) ?

Question 4 : Reprendre ces questions en autorisant une boule supplémentaire régulière connue (on sait qu'elle est de même masse que toutes les autres sauf celle qui est donc classée "hors norme").

Question 5 : Combien de boules peut-on autoriser pour que si l'une d'entre elles (exactement) est de masse différente et qu'on a droit à 4 pesées ? (sans boule régulière de référence).

Question 6 : Problème plus général. On a droit à n pesées. Combien de boules sont autorisées ?

La rubrique « Problèmes » a un nouveau responsable : André STEF. Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr

retour au sommaire