VIE DE LA RÉGIONALE
CONFÉRENCE DE LA JOURNÉE DU 26 MARS

COMMENT BIEN CHOISIR UN MAIRE ?

Le diaporama présenté lors par Rémi Peyre lors de notre journée régionale du 26 mars dernier est disponible sur http://www.normalesup.org/~rpeyre/pro/popul/APMEP.pdf. Les participants à cette journée pourront donc y retrouver ce que Rémi Peyre nous a montré, et les autres se faire une idée du contenu de cette conférence.
Dans cette conférence, deux défis ont été proposés aux participants : vous trouverez ci-dessous leurs solutions, proposées par le conférencier.

Premier défi : Pour n candidats, combien y a-t-il de profils de préférence en **Λ** possibles ? (diapo 23)

La réponse est 2^{n-1}. Il y a deux façons de résoudre le problème :

1ère façon : On compte séparément les profils où le candidat #1 (càd. le candidat le plus à gauche) est premier, celui où c'est le candidat #2 qui est premier, etc. Parmi les profils où le candidat # c est premier, on sait que les candidats #1 à #(c-1) vont être classés en ordre croissant, et ceux #(c+1) à #n en ordre décroissant. Les différents profils possibles se distinguent donc uniquement en disant, du candidat classé 2 e au candidat classé n ème, quels sont ceux qui sont plus à gauche, resp. plus à droite que #c. Cela détermine uniquement le classement global, et réciproquement tout étiquetage “gauche/droite” des (n-1) positions suivi de la première place correspond à un classement possible différent, sous réserve évidemment qu'il y ait le bon nombre total de “gauche” et de “droite”, soit respectivement (c -1) et (n -c). Finalement, le nombre de classements en Λ possibles pour lesquels #c est premier correspond au nombre de façons de choisir (c-1) “gauche” parmi (n-1) places, soit le coefficient binomial (c-1) parmi (n-1). Quand on somme sur toutes les valeurs de c possibles (de 1 à n), on tombe sur la somme des coefficients binomiaux de la ligne (n-1) qui vaut 2^{n-1}.

2e façon :Le résultat précédent ayant l'air un peu “magique”, je me suis demandé s'il n'y avait pas moyen de le rendre plus simple... Et moyen il y avait, en effet ! Pour cela, l'astuce consiste à regarder le classement de notre électeur *en partant de la fin*... Le dernier candidat va nécessairement être #1 ou #n, d'après l'hypothèse de profil en Λ. Puis l'avant-dernier va être nécessairement un des deux “du bord” parmi ceux qui restent, etc. Il y a ainsi deux possibilités à chaque étape, sauf au moment de choisir le premier classé puisqu'à ce moment-là il ne reste plus qu'un seul candidat qui peut être placé en tête. Réciproquement, il est facile de vérifier que toute succession de choix entre « prendre le plus à gauche parmi ceux qui restent » et « prendre le plus à droite parmi ceux qui restent » conduit bien à un profil en Λ. Il y a donc autant de profils en Λ que de façons de choisir n-1 fois entre 2 options, soit 2^{n-1}.

2e défi : Si les ex-æquo sont autorisés, combien y a-t-il de classements possibles pour 12 candidats ? (diapo 46)

La réponse est 28 091 567 595 (oui, c'est beaucoup !).

Il n'existe en fait pas de formule simple permettant de compter le nombre de classements possibles entre n candidats sachant qu'on autorise les ex-æquo ; par contre, il est assez facile de calculer par récurrence le nombre R(n,k) de façons de classer n candidats *sachant qu'il y a exactement k rangs différents qui vont être occupés* : je veux dire par là que, par exemple, R(10,3) est le nombre de façons de classer 10 candidats en donnant une médaille d'or à certains, une médaille d'argent à d'autres et une médaille de bronze aux autres, en sachant qu'il doit y avoir au moins une médaille d'or, d'argent et de bronze distribuées. La formule de récurrence est R(n,1) = 1 (évident), R(n,k) = 0 pour k > n (trivial) et R(n+1,k) = (R(n,k) + R(n,k-1)xk pour k entre 2 et n+1. Pourquoi cela ? Eh bien, on peut mettre un des candidats à part, et décider que pour obtenir un classement de nos (n+1) candidats avec k niveaux différents, il y a deux possibilités :

Ou bien les n premiers candidats occupaient déjà k niveaux différents (R(n,k) possibilités) et il faut mettre le (n+1)ème candidat ex-æquo avec un des k niveaux occupés (k possibilités) ;

retour au sommaire

Ou bien les n premiers candidats occupaient seulement (k-1) niveaux différents (R(n,k-1) possibilités) et il faut insérer le $(n+1)^{\text{ème}}$ candidat entre deux niveaux occupés (k possibilités à nouveau, en n'oubliant pas que le $(n+1)^{\text{ème}}$ candidat peut être tout premier ou tout dernier).

Le tableau des R(n,k) se remplit alors par lignes (n fixé) successives. La première ligne est {1}, la seconde est {1, 2}, la troisième {1, 6, 6}, la quatrième {1, 14, 36, 24}, la cinquième {1, 30, 150, 240, 120}, etc. (on trouve ainsi que R(10,3) = 55 980).

Pour le nombre total de classements possibles de n candidats, il ne reste plus qu'à faire le somme des lignes : il y a ainsi 1 façon de classer 1 candidat seul, 3 façons d'en classer deux (à savoir, ex-æquo, premier candidat vainqueur ou second candidat vainqueur), 13 façons d'en classer trois, 75 façons d'en classer quatre, etc. Cette suite, qui n'a pas de formulation générale simple, est appelée la suite des nombres de Fubini ou des nombres de Bell avec ordre ; et elle est (bien entendu) documentée dans l'encyclopédie de Sloane pour ceux qui veulent en savoir plus sur elle : http://oeis.org/A000670,
ou http://en.wikipedia.org/wiki/Ordered_Bell_number sur Wikipedia.

Le marquis de Condorcet, image Wikipedia

A consulter également, sur le site « Images des maths » du CNRS :
http://images.math.cnrs.fr/La-democratie-objet-d-etude.html
http://images.math.cnrs.fr/Et-le-vainqueur-du-second-tour-est.html
http://images.math.cnrs.fr/La-quete-du-Graal-electoral.html