

SOLUTION DU DÉFI COLLÈGE n° 118

Le Diable et le Fainéant

Un Fainéant se désespérait d'être toujours sans le sou. Ne sachant plus à quel saint se vouer, il eût l'idée d'invoquer le Diable. A peine avait-il prononcé son nom qu'il le vit apparaître. Dominant son effroi, le Fainéant demanda à son visiteur une recette pour faire fortune.

« C'est enfantin, répondit le Diable. Il suffit de traverser plusieurs fois le pont que tu vois là-bas. Après chaque traversée, tu te trouveras avec, dans ta poche, deux fois plus d'argent qu'auparavant.

- Pas possible s'exclama le Fainéant.

- Je m'en porte garant, affirma le Diable. Mais attention ! Il y a une condition : pour me payer de ma peine, tu me donneras 24 euros au terme de chaque traversée miraculeuse. Entendu ?

- Entendu, répondit le Fainéant, enthousiasmé à l'idée de faire si facilement fortune. Commençons sur le champ ! »

Le Fainéant traversa donc le pont une première fois et, ô stupeur, constata qu'il avait dans sa poche le double de la somme qui s'y trouvait auparavant. Ravi, il s'empessa de donner 24 euros au diable et de traverser le pont une seconde fois. Il put s'assurer de nouveau que le diable n'avait pas menti : son argent avait encore doublé. Il remit 24 euros au diable et fit une troisième traversée, au terme de laquelle, l'argent ayant doublé une nouvelle fois, il se retrouva avec exactement... 24 euros en poche, juste de quoi payer son perfide conseiller qui disparut en ricanant.

Combien le Fainéant avait-il d'argent initialement ?

Ce problème a pour origine l'ouvrage « Sur le sentier des mathématiques » ([Boris Kordemski](#), Dunod, 1963). Il a par ailleurs été repris en 1999 dans l'épreuve de mathématiques du Concours de recrutement des professeurs des écoles pour les académies de Dijon et Nancy. Pour rendre le texte plus actuel, nous avons proposé des sommes en euros.

Une première solution

J'appelle s la somme possédée par le fainéant avant sa première traversée du pont.

Après une première traversée, la somme possédée par le fainéant est $2s - 24$

Après une deuxième traversée, la somme possédée par le fainéant est $2 \times (2s - 24) - 24$

Après une troisième traversée, la somme possédée par le fainéant est

$2 \times (2 \times (2s - 24) - 24) - 24$. Il donne 24 € au diable donc $2 \times (2 \times (2s - 24) - 24) - 24 = 24$

L'équation se réduit à $8s - 144 = 24$.

$s = 21$. J'en conclus que le fainéant possédait 21 € avant son premier passage.

Une deuxième solution

Juste avant la troisième traversée, le fainéant possédait 24 €. Il avait donc reçu 12 € du diable et donné 24 € pour sa seconde traversée. Juste avant la seconde traversée, il avait donc 36 €. Il avait la moitié de cette somme, donc 18 € que le diable a doublé. Juste après la première traversée, il avait 18 € + 24 €, c'est à dire 42 €. Il avait donc 21 € avant de commencer ses traversées.

Et avec un tableur ?

Nous pouvons explorer la situation en fonction de la somme possédée par le fainéant et même montrer qu'il faut au moins avoir 24 € au départ pour ne pas être lésé :

- avec 24 €, le fainéant restera toujours à 24 € après chaque passage
- avec moins de 24 €, il va se retrouver ruiné (au pire au 5e passage)
- avec plus de 24 €, sa fortune augmente de plus en plus vite (à 1 € près, c'est l'exponentielle 1 – 2 – 4 – 8 – 16 ...) [voir copie d'écran page suivante].

	A	B	C
1			
2	Somme initiale	25	Augm/dim
3			
4	1er passage		
5	Somme doublée	50	
6	Remise au diable	24	
7	Reste	26	1
8			
9	2e passage		
10	Somme doublée	52	
11	Remise au diable	24	
12	Reste	28	3
13			
14	3e passage		
15	Somme doublée	56	
16	Remise au diable	24	
17	Reste	32	7
18			
19	4e passage		
20	Somme doublée	64	
21	Remise au diable	24	
22	Reste	40	15
23			
24	5e passage		
25	Somme doublée	80	
26	Remise au diable	24	
27	Reste	56	31
28			
29			

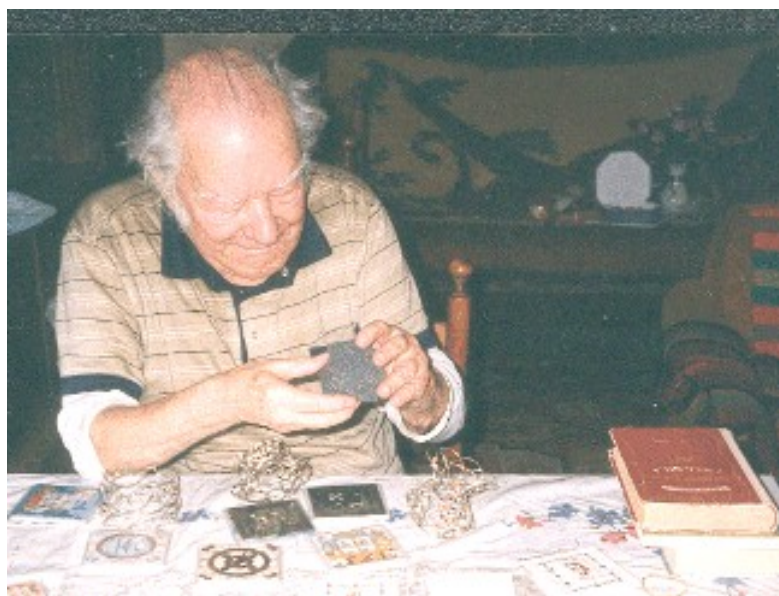
Avec les élèves

La première démarche est sans aucun doute familière à des élèves dès le collège. L'inconnue choisie, il reste à faire vivre le récit de l'énoncé. A la fin de l'histoire, une équation se crée, il reste à la résoudre.

La deuxième démarche évite le calcul algébrique. Un raisonnement est à construire en imaginant une remontée dans le temps pour revenir aux conditions initiales.

L'usage du tableur permet d'explorer la situation et d'imaginer des prolongements possibles en fonction de la somme possédée par le fainéant.

Ces trois démarches méritent de faire partie de la « boîte à outils » à disposition des élèves en fin de collège.



Boris Kordemski (1907-1999) et ses puzzles

Solution du défi lycée n°118

Piles de crêpes

Un cuisinier, qui n'a pas le compas dans l'œil, fait des crêpes et les pose au fur et à mesure sur un plateau. Malheureusement, ses crêpes ne sont pas toutes de la même taille. Une fois qu'il a constitué sa pile de crêpes (ou pourra supposer qu'il y en a n), comment faire pour les ranger dans l'ordre, de façon que la plus grande soit en bas de la pile et la plus petite en haut ?

Pour cela, on dispose uniquement d'une fine spatule, que l'on peut glisser sous une des crêpes, et l'on retourne d'un coup tout le paquet de crêpes qui est posé au-dessus de la spatule.

Le premier défi est le suivant : **écrire un algorithme permettant de trier la pile de crêpes**. On notera `glisserretourner( $k$ )` la procédure qui permet de retourner les k crêpes du haut de la pile.

Le second défi est un peu plus complexe : on a constaté que les crêpes réalisées par le cuisinier avaient toutes une face plus grillée que l'autre. On veut, toujours en utilisant la seule procédure `glisserretourner( $k$ )`, faire en sorte que non seulement les crêpes soient rangées en ordre de taille, mais qu'elles aient toutes la face la moins brûlée sur le dessus. Écrire l'algorithme correspondant.

N.B. « Travaux pratiques » : on pourra vérifier que l'algorithme « fonctionne bien » en construisant des crêpes dans du carton épais !

Solution

En ce qui concerne le premier défi, l'algorithme était simple à trouver.

Pour k de n à 2 faire :

- ♦ chercher l'indice i de la plus grande crêpe parmi les k premières en partant du haut
- ♦ `glisserretourner( $i$ )`
{commentaire : on fait ainsi passer la plus grande des k premières crêpes du dessus}
- ♦ `glisserretourner( $k$ )`
{la plus grande des k premières crêpes se retrouve ainsi en $k^{\text{ème}}$ position des la pile}

Fin de la « boucle » faire

Remarque : on effectuera ainsi $(2n-2)$ fois la procédure `glisserretourner`.

Essayez avec des crêpes (ou des disques de carton), et vous verrez que « ça fonctionne » !

Cela se complique un peu pour le second défi.

Pour k de n à 2 faire :

- ♦ chercher l'indice i de la plus grande crêpe parmi les k premières en partant du haut
- ♦ `glisserretourner( $i$ )`
{commentaire : on fait ainsi passer la plus grande des k premières crêpes sur le dessus}
- ♦ **si** dessus non-brûlé **alors** `glisserretourner(1)`
{la face brûlée de la crêpe du dessus sera alors visible, mais le `glisserretourner` suivant la remettra dans le bon sens}
- ♦ `glisserretourner( $k$ )`
{la plus grande des k premières crêpes se retrouve ainsi en $k^{\text{ème}}$ position des la pile}

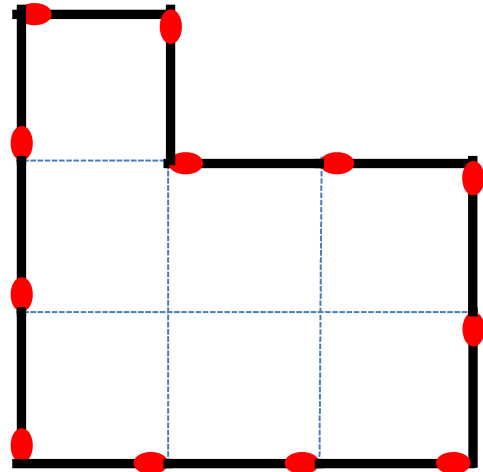
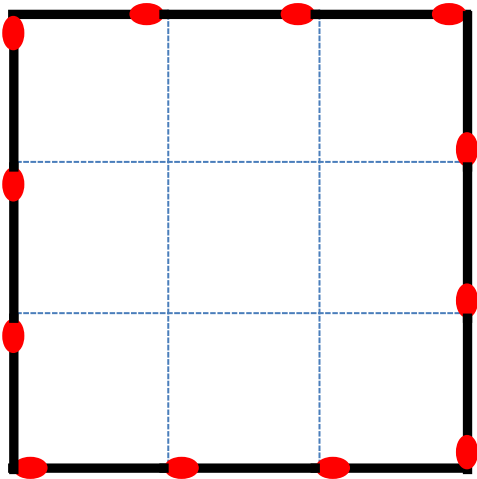
Fin de la « boucle » faire

Si dessus brûlé, **alors** `glisserretourner (1)`

{commentaire: les $n-1$ `glisserretourner( $k$ )` ont bien rangé les crêpes par ordre de taille, mais encore faut-il retourner celle du dessus si sa face brûlée est visible}

Remarque : on effectuera ainsi $(3n-2)$ fois la procédure `glisserretourner` dans le pire des cas.

N.D.L.R. Ces algorithmes s'inspirent très fortement de ce que Martin Quinson avait présenté dans un atelier « Algorithmique sans ordinateur » lors d'une précédente journée régionale.

DEFI COLLEGE n° 119**Avec douze allumettes**

L'unité de longueur est la longueur d'une allumette.

Il est possible de placer douze allumettes sur un même plan et de former un polygone ayant une aire exprimée avec un nombre entier. Ci-dessus, en voici deux exemples : un de neuf unités d'aire et un de sept unités d'aire.

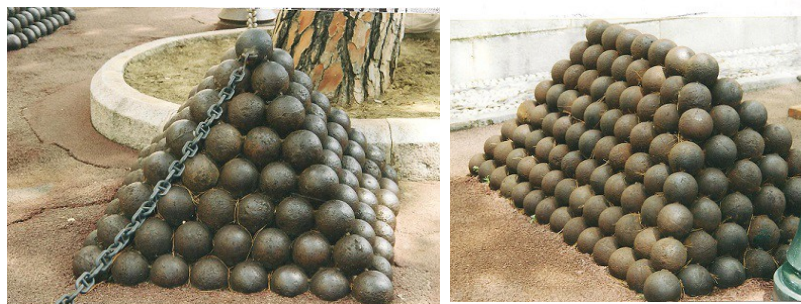
En utilisant les douze allumettes (sans chevauchement), forme un polygone de six unités d'aire, puis de cinq unités d'aire, de quatre unités d'aire, etc.

Pour chacune des aires entières obtenues, trouve le plus possible de polygones différents.

Envoyez toute proposition de solution de vos élèves, ainsi que toute proposition de nouveau défi, à michel.ruiba@ecopains.net et francois.drouin2@wanadoo.fr . **Merci.**

DÉFI LYCÉE n° 119

Les boulets de Monaco.



Ces deux photos ont été prises devant le palais princier de Monaco .

Voici quelques questions possibles...

1. Combien y a-t-il de boulets dans la pyramide à base carrée de gauche ?
2. Combien y a-t-il de boulets dans la « forme » à base rectangulaire de droite ?
3. Donner une formule générale pour la disposition en pyramide de base carrée de côté n .
4. Donner une formule générale pour l'autre disposition de « base » rectangulaire n et p .
5. Si, dans la disposition de droite, on double les valeurs de n et p , quelle sera la conséquence sur le nombre total de boulets ?
6. Est-il possible de disposer les boulets de la photo de droite pour les ranger en pyramide à base carrée ?
7. Est-il possible de disposer les boulets de la photo de gauche pour les ranger comme dans la photo de droite ?

Cette situation inspirera sans doute d'autres questions à poser à des élèves, selon le niveau de classe, le degré d'initiative laissé aux élèves, les modalités de restitution de la recherche proposées...

Envoyez toute proposition de solution de vos élèves, ainsi que toute proposition de nouveau défi, à michel.ruiba@ecopains.net et francois.drouin2@wanadoo.fr . **Merci.**