Solution du problème n° 118

Problème de pesées

proposé par André Stef

Aucune réponse n'a été envoyée. Les questions 5) et 6) sont à nouveau proposées aux lecteurs. Nous donnons ici des éléments de réponse aux questions 1) à 4) et une piste de résolution pour les questions 5 et 6.

Rappel de l'énoncé:
On dispose d'une balance de Roberval supposée équilibrée. Ce qui n'arrive bien sûr jamais, sauf en math (précision importante, car la pesée d'objets en physique, donc en "vrai" fait appel au "principe de double pesée". Si on vous fait le coup d'une simple pesée dans un commerce, appelez la police !).
On part donc en math du principe que si on place un objet sur chaque fléau de la balance, la balance est en équilibre si les deux objets ont même masse (donc même poids, ce que compare la balance), et penche sinon du côté de la masse la plus importante.

Problème connu : On a 9 boules identiques d'aspect mais une boule est plus lourde (mais non détectable "à la main"). Comment peut-on déterminer de manière certaine cette boule en 2 pesées (au plus) ?
Ce n'est pas la question du Petit Vert, vous pouvez cependant chercher ou regarder la producution d'un atelier MATh.en.JEANS sur le sujet (utile pour la suite) :
http://mathenjeans.free.fr/adh/articles/2009/VillerslesNancy_2009/pesee_Villers_2009.pdf.

Variation : On a 12 boules identiques d'aspect mais une boule est de masse (et donc de poids) différente. Comment peut-on déterminer de manière certaine cette boule en 3 pesées (au plus) ?
Ce problème est également connu et vous pouvez vous préparer à la suite en cherchant une solution.

Question 1 : On a 13 boules identiques d'aspect mais une boule est de masse (et donc de poids) différente. Peut-on déterminer de manière certaine cette boule en 3 pesées (au plus) ?

Question 2 : On a 14 boules identiques d'aspect mais une boule est de masse (et donc de poids) différente. Peut-on déterminer de manière certaine cette boule en 3 pesées (au plus) ?

Question 3 : On a 15 boules identiques d'aspect mais une boule est de masse (et donc de poids) différente. Peut-on déterminer de manière certaine cette boule en 3 pesées (au plus) ?

Question 4 : Reprendre ces questions en autorisant une boule supplémentaire régulière connue (on sait qu'elle est de même masse que toutes les autres sauf celle qui est donc classée "hors norme").

Question 5 : Combien de boules peut-on autoriser pour que si l'une d'entre elles (exactement) est de masse différente et qu'on a droit à 4 pesées ? (sans boule régulière de référence).

Question 6 : Problème plus général. On a droit à *n* pesées. Combien de boules sont autorisées ?

retour au sommaire

Reformulation du problème général:

Quel est le nombre N_k maximal de boules, dont une irrégulière (et une seule), pour lequel il existe un algorithme permettant de déterminer la quelle est irrégulière parmi ces N_k en *k* pesées (maximum) ?

La réponse à une question de détermination d'un maximal peut-être découpée de la manière suivante:

- on établit un majorant M_k de N_k (avec *k* fixé)
- on établit que M_k est un nombre admissible en exhibant un algorithme permettant de déterminer la boule irrrégulière lorsqu'il y a M_k boules. (c'est-à-dire qu'on établit que le majorant "est dans l'ensemble étudié").

Les éléments fournis ci-après suivent cette démarche.

NB: il n'était pas demandé d'algorithme dans le problème. Mais le responsable de la rubrique ne sait pas répondre aux questions sans mettre en œuvre des algorithmes.

Eléments pour les questions 1 à 4

Toute solution peut se traduire par un graphe ternaire (chaque nœud a trois fils, correspondant au résultat d'une pesée, même si certains résultats sont impossibles, notés IMP) de hauteur 3 (issu de 3 pesées maximum, toutes les feuilles sont au plus à hauteur 3).

Voici une solution avec 12 boules, dont une est de masse différente. Dans toutes les feuilles, il est possible de déterminer si la boule différente est plus lourde ou plus légère.

pesée 1												1	2	3	4		5	6	7	8											
résultat						↖										↑										↗					
pesée 2	1	2	5	6				3	7	9	10			9	10		11	1			1	2	5	6				3	7	9	10
résultat		↖				↑				↗			↖			↑			↗			↖				↑				↗	
pesée 3	1		2	4	8		1	2	5		6	9		10	12		1	9		10	5		6	4	8		1	2	1		2
résultat	↖	↑	↗	↖		↑		↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖		↑		↗	↖	↑	↗
boule différ	1	7	2	4		IMP		8	6	3	5	9	11	10	12	IMP	12	10	11	9	5	3	6	8		IMP		4	2	7	1
masse	+	-	+	+				-	-	+	-	+	-	+	+		-	-	+	-	+	-	+	+				-	-	+	-

Couleurs: les couleurs sont indicatives. Pour chaque boule, la couleur indique si elle est soupçonnée d'être plus lourde ou plus légère

plus lourde

plus légère

pas d'information

boule régulière (information certaine)

La question du nombre initial de boules qu'on peut déterminer en 3 pesées est liée au nombre de feuilles possibles avec un arbre ternaire de hauteur 3, soit $3^3 = 27$ feuilles.

Résultat médian

Le résultat médian (13 résultats à gauche, 13 à droite), correspondant à 3 pesées avec équlibre parfait, ne peut qu'identifier une boule n'ayant pas été testée. On ne peut alors pas déterminer si elle est plus lourde ou plus légère.

Résultats autres que le résultat médian

La symétrie des résultats de pesées (13 pesées de gauche et 13 pesées de droites, sur le tableau précédent) permet au mieux 13 autres identifications de boules, la symétrie des pesées (la balance penche d'un côté ou d'un autre) traduisant alors le fait que la boule irrégulière est plus lourde ou plus légère.

Un algorithme de résolution (traduit par un arbre du type précédent) pourra donc déterminer au maximum 13+1=14 boules (La 14ème étant le résultat médian). Ce qui répond à la question 3 (et partiellement à la question 4).

retour au sommaire

<u>Majoration du nombre de boules possibles</u>
On désigne par *n* le nombre de boules dans la pesée initiale; *n* est donc pair (*n=2 p*). Le déséquilibre (par exemple penchant vers la gauche) fournit un nombre de possibilités *n* de couples (numéro boule irrégulière, masse inférieure ou supérieure). Le sous-arbre gauche (résultats de 1 à 9) contient 9 feuilles. Comme l'algorithme de résolution traite toutes les possibilités, on a alors $n=2\mathrm{p}\leq 9$, soit $n\leq 8$.

On désigne par *q* le nombre de boules non présentes dans la pesée initiale. Le sous-arbre associé à une première pesée équilibré (résultats 10 à 18) contient 9 feuilles (dont la feuille médiane). Le nombre de couples autorisés (numéro boule irrégulière, masse inférieure ou supérieure), est donc au maximum 9, soit une boule de poids indéterminé pour le résultat médian et 8 pour les sous arbres gauche et droit. Pour les raisons de symétrie déjà évoqués, on a donc $q\leq 4+1=5$.
En conclusion, le nombres maximal de boules qu'un algorithme de résolution peut traiter est 8+5=13, ce qui répond à la question 2.

<u>Question 1</u>: On trouvera ci-dessous un arbre de résolution possible avec 13 boules.

pesée 1											1	2	3	4		5	6	7	8											
résultat						↖									↑										↗					
pesée 2	1	2	5	6				3	7	9	10			9	10		11	1			1	2	5	6				3	7	9
résultat		↖				↑				↗			↖			↑			↗			↖				↑				↗
pesée 3	1		2	4	8		1	2	5		6	9		10	12		1	9		10	5		6	4	8		1	2	1	
résultat	↖	↑	↗	↖		↑		↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖		↑		↗	↖	↑
boule différe	1	7	2	4		IMP		8	6	3	5	9	11	10	12	13	12	10	11	9	5	3	6	8		IMP		4	2	7
masse	+	-	+	+				-	-	+	-	+	-	+	+	??	-	-	+	-	+	-	+	+				-	-	+

<u>Avec une boule de référence (question 4)</u>
Le fait d'ajouter une boule de référence (de masse régulière) permet une première pesée avec un nombre de boules inconnues *n* impair. Suivant le raisonnement précédent, on a $n\leq 9$. L'arbre ci-dessous est la mise en oeuvre d'un algorithme permettant de déterminer la boule irrégulière parmi 14 et une 15ème régulière connue (notée Ref).

AVEC 14 BOULES ET UNE DE REFERENCE (ref)

pesée 1										13	1	2	3	4		5	6	7	8	Ref										
résultat						↖									↑										↗						
pesée 2	1	2	5	6				3	7	9	10			9	10		11	1			1	2	5	6				3	7	9	10
résultat		↖				↑				↗			↖			↑			↗			↖				↑				↗	
pesée 3	1		2	4	8		1	2	5		6	9		10	12		1	9		10	5		6	4	8		1	2	1		2
résultat	↖	↑	↗	↖		↑		↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖	↑	↗	↖		↑		↗	↖	↑	↗
boules	1	7	2	4		13		8	6	3	5	9	11	10	12	14	12	10	11	9	5	3	6	8		13		4	2	7	1
masse	+	-	+	+		+		-	-	+	-	+	-	+	+	??	-	-	+	-	+	-	+	+		-		-	-	+	-

<u>Questions 5 et 6</u>

Piste possible: On peut procéder par récurrence sur le nombre de pesées sur le principe de ce que l'on observe avec 3 pesées:

- Si la première pesée fournit un équilibre, il reste alors une pesée de moins pour examiner les boules restantes
- Si la première boule fournit un déséqulibre, on peut recomposer les boules en "superboules", associant une boule éventuellement plus lourde et une boule éventuellement plus légère. Déterminer alors la superboule et sa masse revient à déterminer la boule irrégulière dans cette superboule et sa masse.
- Arbre ternaire= puissances de 3 dans l'air...

La rubrique « Problèmes » a un nouveau responsable : André STEF. Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : <u>Andre.Stef@univ-lorraine.fr</u>

retour au sommaire

Problème du trimestre n°119

Proposition de Jacques Choné

Un cavalier se déplace sur un échiquier infini assimilé à $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ en partant de $(0{,}0)$. Un mouvement consiste en un décalage de deux unités parallèlement à l'un des axes de coordonnées suivi d'un décalage d'une unité dans la direction perpendiculaire. Les mouvements sont indépendants et pour chacun d'entre eux les huit possibilités sont équiprobables. Soit (x_n, y_n) la position du cavalier après le *n*-ième mouvement. Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire réelle $d_n = x_n - y_n$, c'est-à-dire la fonction $D_n(x) = \sum_k P(d_n = k)x^k$.

Remarque : connaitre la fonction (ou série) génératrice D_n revient à connaître la loi de probabilité de la variable aléatoire d_n . En effet, on peut par exemple retrouver directement la loi par la formule $P(d_n = k) = \frac{D_n^{(k)}(0)}{k!}$, même si l'expression de cette dérivée peut ne pas être sympathique (et c'est le cas ici) !

Intérêt des séries génératrices :

- ce sont des séries entières, dont le rayon de convergence est supérieur à 1 (au sens large, bien sûr).
- la série converge simplement pour x=1 (car $\sum_k P(d_n = k) = 1$)
- Si X et Y sont deux variable aléatoires indépendantes à valeurs entières de séries génératrices respectives F_X et F_Y alors la série génératrice de la variable aléatoire X+Y vérifie $F_{X+Y} = F_X F_Y$

Indication pour ce problème : même si le cadre général des fonctions génératrices est celui des séries entières, il s'agit ici de sommes finies car $-3\mathrm{n} \leq d_n \leq 3\mathrm{n}$. La fonction génératrice attendue est donc une fonction polynomiale.

Envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr

retour au sommaire