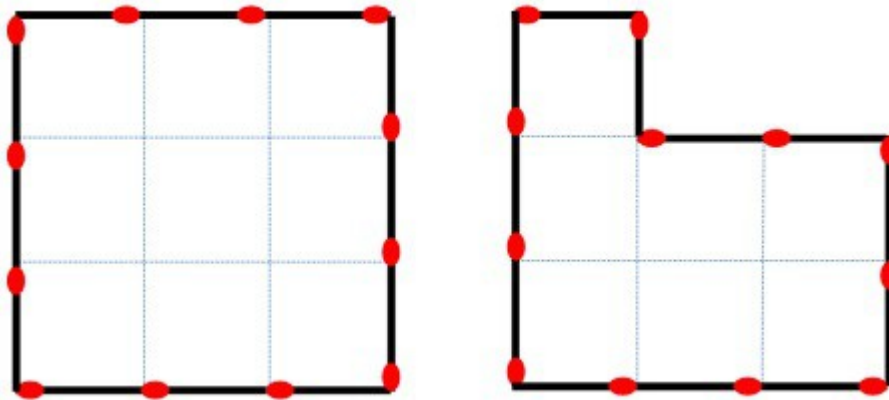


SOLUTION DU DÉFI COLLÈGE n° 119

Avec douze allumettes



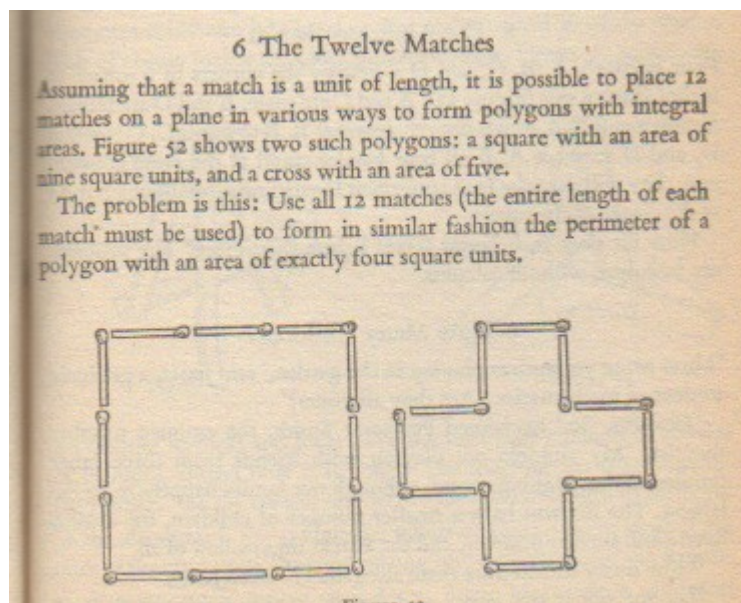
Rappel de l'énoncé : L'unité de longueur est la longueur d'une allumette.

Il est possible de placer douze allumettes sur un même plan et de former un polygone ayant une aire exprimée avec un nombre entier. Ci-dessus, en voici deux exemples : un de neuf unités d'aire et un de sept unités d'aire.

En utilisant les douze allumettes (sans chevauchement), forme un polygone de six unités d'aire, puis de cinq unités d'aire, de quatre unités d'aire, etc.

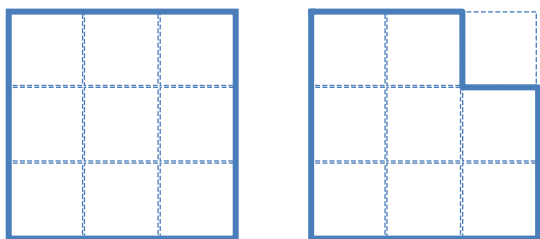
Pour chacune des aires entières obtenues, trouve le plus possible de polygones différents.

Éléments de solution

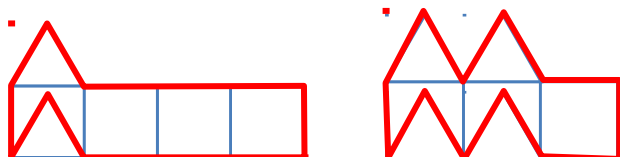


Le problème est inspiré d'une proposition de Martin Gardner dans le livre « Mathematical Puzzles and Diversions » (PENGUIN BOOKS 1959).

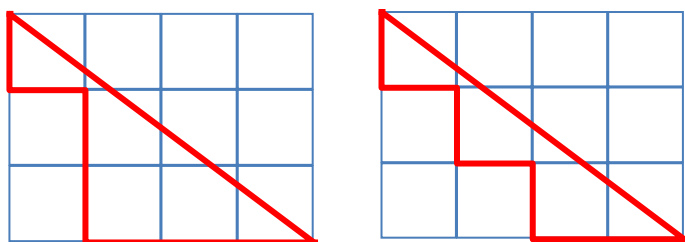
« Rogner » un coin du carré permet de conserver le périmètre et de diminuer l'aire de 1. Des polygones d'aire 8, 7, 6 ou 5 sont ainsi aisément obtenus.



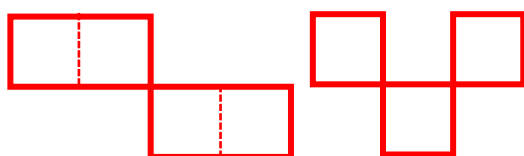
Obtenir un polygone d'aire 4 nécessite une autre stratégie. Un polygone d'aire 3 peut alors être aussi obtenu.



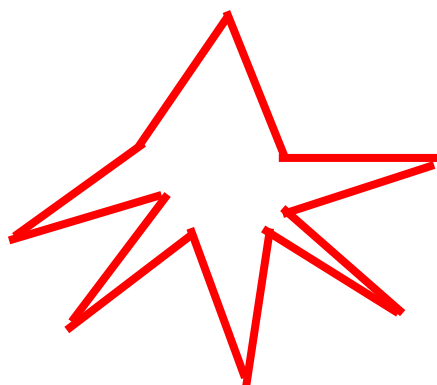
Une autre piste est l'utilisation d'un triangle rectangle 3,4,5. Son aire est 6 ; en l'« écornant », son aire peut être réduite à 4, puis à 3.



Et avec des polygones croisés ? Des polygones d'aire 3 et 4 sont obtenus.



Obtenir un polygone d'aire inférieure à 3 nécessite une nouvelle stratégie.

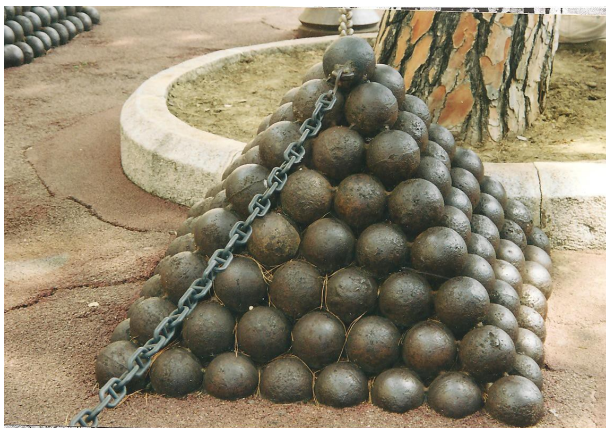


Avec les douze allumettes, je réalise une ligne brisée fermée. Je me convaincs que l'aire maximale du polygone formé sera l'aire du dodécagone et qu'au minimum l'aire pourra être égale à 0.

L'aire d'un dodécagone de côté c est égale à environ $11,2 c^2$ (ce résultat pourra être retrouvé par des élèves de troisième). Je réussis à me persuader que la déformation du polygone me permettra d'obtenir toute aire comprise entre 0 et 11 (minimum et maximum inclus).

Solution du défi lycée n°119

Nous avons présenté les deux photos ci-dessous, et posé un certain nombre de questions, dont ces deux-ci qui permettent de répondre à toutes les autres : « Donner une formule générale pour la disposition en pyramide de base carrée de côté n » et « Donner une formule générale pour l'autre disposition de « base » rectangulaire n et p ».



Pour ce premier exemple il est facile de voir que la base est constituée de 8×8 boulets.

Les couches suivantes sont des carrés et donc au total :

$$8^2 + 7^2 + 6^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = \frac{8 \times (8+1) \times (2 \times 8 + 1)}{6}, \text{ soit}$$

204 boulets

Si la couche de base contient n^2 boulets on aura au

total : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ boulets, formule qui peut se démontrer par récurrence sur n .

Sur ce second exemple on peut deviner que la base est constituée de 14×8 boulets.

Chaque couche supplémentaire est un rectangle qui compte un boulet de moins dans la longueur et un de moins dans la largeur. On a donc 13×7 boulets pour la deuxième couche.

Au total, cet amonçèlement contient :

$$14 \times 8 + 13 \times 7 + \dots + 8 \times 2 + 7 \times 1 = 420 \text{ boulets.}$$

Si maintenant on cherche à connaître le nombre de boulets d'un empilement semblable dont le base est formée d'un rectangle de n boulets dans sa longueur et de p boulets dans sa largeur il faut que l'on cherche la formule générale :

$$n p + (n-1)(p-1) + \dots + (n-(p-2))(p-(p-2)) + (n-(p-1))(p-(p-1))$$

En développant on peut écrire :

$$p \times n p - (1+2+3+\dots+(p-1))n - (1+2+3+\dots+(p-1))p + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (p-1)^2$$

Comme il a été écrit plus tôt on peut démontrer par récurrence que :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (p-1)^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6} \text{ et bien évidemment que : } 1+2+3+\dots+(p-1) = \frac{(p-1)p}{2}$$

Ainsi la formule générale devient :

$$n p^2 - \frac{(p-1)p}{2}(n+p) + \frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$$

En réduisant au dénominateur 6 les trois expressions et en factorisant par p le numérateur il reste à factoriser : $3np - p^2 + 3n + 1 = (p+1) + (1-p)(1+p) = (p+1)(3n+1-p)$

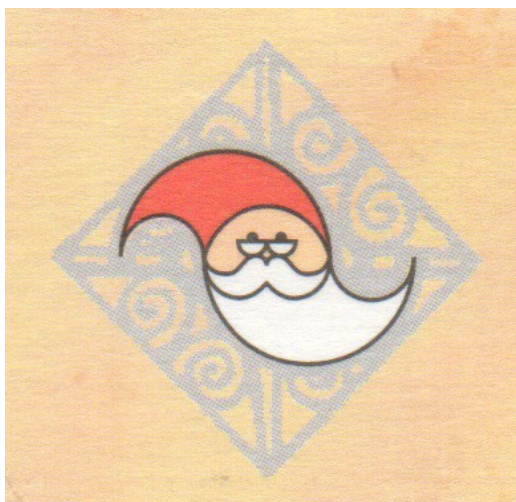
Pour finir, un tel entassement dont la base est un rectangle de dimensions $n \times p$ contient donc :

$$\frac{p(p+1)(3n+1-p)}{6} \text{ boulets.}$$



Et comme c'est la période des fêtes, nous vous offrons en prime cette jolie pyramide de boules de glaces...

DEFI COLLEGE n° 120



Au dos d'une carte postale achetée au pays du père Noël (Santa Claus Office, 96930 Artic Circle, FINLAND), figure un logo réalisé avec de nombreux demi-cercles et arcs de cercles.

Redessinez ce logo en utilisant la règle et le compas ou un logiciel de géométrie.

Le Petit Vert se fera un plaisir de montrer vos créations à ses lecteurs. N'hésitez pas à confier vos programmes de construction.

Envoyez toute proposition de solution de vos élèves, ainsi que toute proposition de nouveau défi, à michel.ruiba@ecopains.net et francois.drouin2@wanadoo.fr . **Merci.**

Que d'ours ! Que d'ours !

(paroles de Mac Mahon)

2015 : une année pleine de projets ? Dix ours en peluche pour ces quatre étages d'empilement : combien d'étages pourrions-nous réaliser avec **2015** ours ?

En **2015**, ces étoiles à cinq branches nous inspireront-elles de beaux tracés et des pliages sympathiques ?



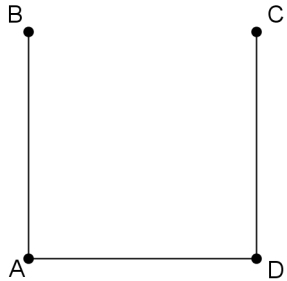
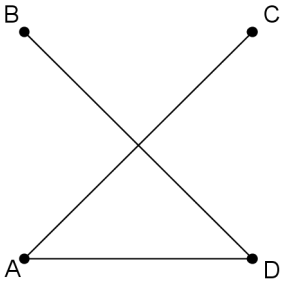
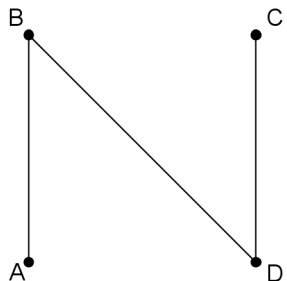
*Photo prise en décembre 2012
dans la galerie commerciale
du CORA de Moulins-les-Metz*

DÉFI LYCÉE n° 120

Quatre villes (A, B, C et D) sont disposées aux sommets d'un carré.

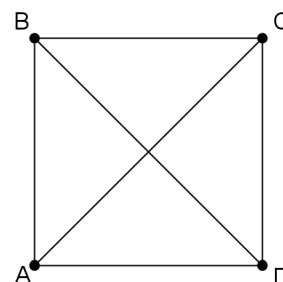
Pour l'instant, il n'y a aucune route pour les joindre. On voudrait pouvoir visiter successivement ces quatre villes dans un ordre déterminé à l'avance, sans jamais retraverser une ville déjà visitée.

Voici quelques exemples :

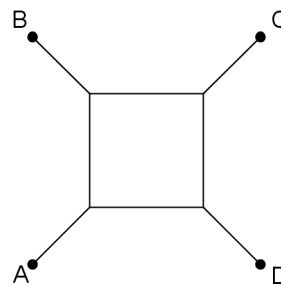
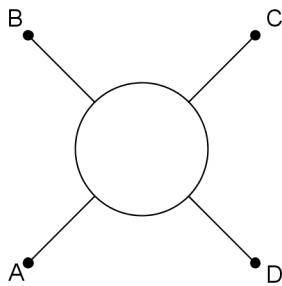
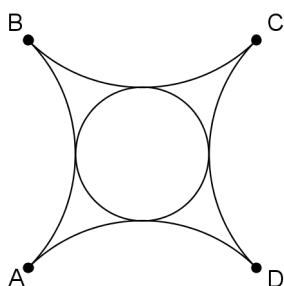
 Si l'on veut réaliser le trajet $B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C$, on peut construire les 3 routes ci-dessus (ce qui permet également de faire le trajet $C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B$, mais aucun autre trajet n'est possible).	 Si l'on veut réaliser le trajet $B \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow C$, on peut construire les 3 routes ci-dessus (ce qui permet également de faire le trajet $C \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B$, mais aucun autre trajet n'est possible).	 Si l'on veut réaliser le trajet $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$, on peut construire les 3 routes ci-dessus (ce qui permet également de faire le trajet $C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$, mais aucun autre trajet n'est possible).
---	---	---

Le problème est le suivant : on veut construire les routes nécessaires pour pouvoir réaliser **tous** les trajets possibles passant par les quatre villes.

Il est évident que la construction des six routes ci-contre le permet. Mais peut-on faire mieux (c'est à dire minimiser la longueur totale des routes construites, donc le coût de construction de ces routes) ?



N'hésitez pas à faire travailler votre imagination ... comme par exemple les trajets suivants :



Pouvez-vous **prouver** que vous avez trouvé le trajet minimum, ou est-ce seulement une « intime conviction » ?

Par ailleurs, le résultat que vous aurez trouvé minimise-t-il également la longueur des trajets (en prenant alors le point de vue de l'automobiliste, et non celui du constructeur des routes) ?

Envoyez toute proposition de solution de vos élèves, ainsi que toute proposition de nouveau défi, à michel.ruiba@ecopains.net et francois.drouin2@wanadoo.fr . **Merci.**