Suite de la solution du problème n°118

Problème de pesées (proposé par André Stef)

On dispose d'une balance de Roberval supposée équilibrée. Ce qui n'arrive bien sûr jamais, sauf en math (précision importante, car la pesée d'objets en physique, donc en "vrai" fait appel au "principe de double pesée"). On part donc en MATH du principe que si on place un objet sur chaque fléau de la balance, la balance est en équilibre si les deux objets ont même masse (donc même poids, ce que compare la balance), et penche sinon du côté de la masse la plus importante.

Reformulation du problème général posé dans le PV118 :

Quel est le nombre N_k maximal de boules, dont une irrégulière (et une seule), pour lequel il existe un algorithme permettant de déterminer laquelle est irrégulière parmi ces N_k en *k* pesées (maximum) ?

Solution proposée par André Stef (aucune solution n'a été reçue, mais Jacques Choné a écrit un message, indiqué après la solution).
La question ne laisse pas d'ambiguité. On y répondra en introduisant d'autres suites, qui indiqueront au passage que la question aurait pu être comprise de différentes manières (erronées).
On a établi dans le PV119 que $N_3=13$. On peut vérifier que $N_1=0$ et $N_2=4$.

Problème A. On définit A_k le nombre maximal de boules, dont une irrégulière (et une seule), pour lequel il existe un algorithme permettant de déterminer laquelle est irrégulière, **et** si elle est plus lourde ou plus légère, parmi ces A_k en *k* pesées (maximum).
On a établi dans le PV119 que $A_3=12$ ($A_3\geq 12$ via l'algorithme écrit ; $A_3\leq 12$ est non écrit mais résultat intermédiaire de la majoration du nombre de boules possibles). On peut vérifier que $A_1=0$ et $A_2=3$.
Par le principe du résultat médian (PV119) on a $N_k\geq A_k+1$

Problème B. On définit B_k le nombre maximal de boules, dont une irrégulière (et une seule), pour lequel il existe un algorithme permettant de déterminer laquelle est irrégulière, parmi ces B_k en *k* pesées (maximum), en utilisant une boule **supplémentaire** connue de poids normal.
On a établi dans le PV119 que $B_3\geq 13$ via l'algorithme écrit (Attention ! la boule supplémentaire était alors comptée dans les effectifs). On peut vérifier que $B_1=2$ et $B_2=5$.

Problème C. On définit C_k le nombre maximal de boules, dont une irrégulière (et une seule), pour lequel il existe un algorithme permettant de déterminer laquelle est irrégulière, **et** si elle est plus lourde ou plus légère, parmi ces C_k en *k* pesées (maximum),en utilisant une boule **supplémentaire** connue de poids normal.
On a $C_3=13$ ($C_3\geq 13$ via l'algorithme écrit en PV119. $C_3<14$ car un graphe ternaire de hauteur 3 ne peut pas distinguer les 28 cas différents (boule, plus ou moins lourde) avec 14 boules). On peut vérifier que $C_1=1$ et $C_2=4$.
Par le principe du résultat médian (PV119) on a $B_k\geq C_k+1$.

Premiers résultats généraux

En considérant le résultat médian ET pour les raisons de symétrie des pesées (PV119), on a $A_k \leq \frac{3^k-1}{2}$, $C_k \leq \frac{3^k-1}{2}$ (le résultat médian ne permet pas de déterminer une boule et les autres cas (3^k-1) permettent au mieux de distinguer les boules avec autant de cas de boules plus lourdes que de boules moins lourdes, on a $N_k \leq \frac{3^k+1}{2}$, $B_k \leq \frac{3^k+1}{2}$ (le résultat médian et le fait qu'il n'est pas nécesaire de déterminer le poids de la boule peuvent permettre la prise en compte d'une boule supplémentaire éventuelle).

Résultats fondamentaux

On a $C_{k+1} \geq 3\mathrm{C}_k + 1$

En effet, en disposant une première pesée d'un côté C_k boules inconnues et la boule de référence, et de l'autre côté C_k+1 boules inconnues, on pourra :

- si la balance est en équilibre, déterminer en *k* pesées laquelle est de poids différent (et en plus ou en moins) parmi C_k ;
- si la balance penche, constituer C_k couples de boules (une prise de chaque côté de la balance, excluant la boule de référence et une boule de l'aute côté) et déterminer en *k* pesées lequelle est de poids différent (et en plus ou en moins) parmi ces C_k . La pesée initiale permet de déterminer la boule différente dans le couple. Si le reste des pesées est équilibré (résultats médians) la boule irrégulière est celle qui n'a pas été reprise après la première pesée, et on sait également si elle est plus lourde ou plus légère.

Considérant alors que $C_1 = 1 = \frac{3^1-1}{2}$ et $C_k \leq \frac{3^k-1}{2}$, on montre par récurrence sur *k*, que $C_k = \frac{3^k-1}{2}$ pour tout entier naturel non nul *k*.

Cela établit donc également que $C_{k+1} = 3\mathrm{C}_k + 1$ et que l'algorithme récursif précédent fournit bien une méthode d'obtention de la boule irrégulière parmi C_k en *k* pesées,

Les inégalités $B_k \geq C_k + 1$ et $B_k \leq \frac{3^k+1}{2}$ permettent de déduire que $B_k = \frac{3^k+1}{2}$ pour tout entier naturel non nul *k*. L'algorithme décrit pour le problème C peut être appliqué au problème B, le résultat médian fournissant un résultat de boule irrégulière (mais sans déterminer si elle est plus lourde ou plus légère).

On remarquera pour la suite que le fait d'avoir droit à plusieurs boules de référence ne changerait rien aux valeurs de B_k et C_k (puisque les valeurs de majoration de B_k et C_k obtenues dans les premiers résultats généraux ne dépendent pas du nombre de boules de référence et sont en fait les valeurs de B_k et C_k).

On a $A_{k+1} \geq 3\mathrm{C}_k$

En effet, en disposant une première pesée avec C_k boules de chaque côté, on pourra :

- si la balance est en équilibre, déterminer en *k* pesées laquelle est de poids différent (et en plus ou en moins) parmi C_k , en prenant comme boule de référence une boule de la première pesée ;
- si la balance penche, constituer C_k couples de boules (une prise de chaque côté de la balance) et déterminer en k pesées lequelle est de poids différent (et en plus ou en moins) parmi ces C_k , en prenant comme boule de référence une boule non encore utilisée. La pesée initiale permet de déterminer la boule différente dans le couple.

Les inégalités $A_{k+1} \geq 3C_k$ et $A_k \leq \frac{3^k - 1}{2}$ pour tous k permettent d'établir que $\frac{3^k - 3}{2} \leq A_k \leq \frac{3^k - 1}{2}$ pour tout entier naturel k supérieur à 2.

Les inégalités $N_k \geq A_k + 1$ et $N_k \leq \frac{3^k + 1}{2}$ permettent d'établir que $\frac{3^k - 1}{2} \leq N_k \leq \frac{3^k + 1}{2}$ pour tout entier naturel k supérieur à 2, ce qui ne permet pas de conclure, pour l'instant, sur la valeur de N_k entre ces deux valeurs entières consécutives.

Détermination de N_k pour $k \geq 2$

On montre que $N_{k+1} = 2C_k + B_k$ pour $k \geq 1$.

En effet un algorithme permettant de déterminer en *k*+1 pesées une boule irrégulière parmi *n* boules se décompose en une première pesée de 2*p* boules (*p* sur chaque plateau) et laissant *q* boules de côté ($2p + q = n$). Dès lors :

- si la balance est en équilibre, l'algorithme appliqué revient à déterminer en *k* pesées laquelle est de poids différent parmi *q* en ayant droit à une boule de référence (n'importe laquelle de la première pesée). La valeur maximale de *q* admissible est donc B_k ;
- si la balance penche, déterminer la boule irrégulière parmi les 2*p* boules déjà testées (et ainsi savoir sans plus d'investigations si elle est plus lourde ou plus légère) revient à déterminer, en *k* pesées, le couple de boules (une prise de chaque côté de la balance) irrégulier (au singulier) parmi *p* ainsi que son poids (plus ou moins). On a droit pour cela à une boule de référence (une des *q* boules non utilisées, puisque *q* peut être choisi non nul). La valeur maximale de *p* admissible est donc C_k .

On conclut alors $N_{k+1} \leq 2C_k + B_k$ en majorant *p* et *q*. On a également $N_{k+1} \geq 2C_k + B_k$ en remarquant qu'on met bien en place un algorithme en faisant appel aux méthodes pour déterminer les boules suivant les problèmes B et C en *k* pesées.

En utilisant les expressions de B_k et C_k obtenues précédemment, on obtient

$$N_k = \frac{3^k - 1}{2} \text{ pour } k \geq 2 .$$

La relation déjà établie $N_k \geq A_k + 1$ permet de conclure que

$$A_k = \frac{3^k - 3}{2} \text{ pour } k \geq 2 .$$

Remarque :Les algorithmes présentés ici ont été l'objet d'un exposé et d'un rapport par des étudiantes de licence (L3 pluridisciplinaire 2007/2008 à Epinal), sans chercher à montrer que les valeurs sont optimales.

Courrier reçu (en juin) : Jacques Choné nous a transmis un article de G Gannon et M Martelli publié à *The College Mathematics Journal* (28) en 1997 intitulé : "*Weighing coins : divide and conquer to detect a counterfeit*" (http://www.link.cs.cmu.edu/15859-s11/notes-2005/maacoins.pdf). Les auteurs étudient, entre autres, les problèmes appelés A et C ci-dessus. Ils fournissent pour chaque problème un algorithme (différent de ceux présentés ici). Mais ils n'établissent pas rigoureusement que ces valeurs sont maximales, c'est-a-dire que $A_k = (3^k - 3)/2$ et $C_k = (3^k - 1)/2$.

Pour toute proposition de nouveau problème, contacter Andre.Stef@univ-lorraine.fr

Solution du problème n° 119

Déplacement aléatoire de cavalier

proposé par Jacques Choné

Un cavalier se déplace sur un échiquier infini assimilé à $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ en partant de $(0,0)$. Un mouvement consiste en un décalage de deux unités parallèlement à l'un des axes de coordonnées suivi d'un décalage d'une unité dans la direction perpendiculaire. Les mouvements sont indépendants et pour chacun d'entre eux les huit possibilités sont équiprobables. Soit (x_n, y_n) la position du cavalier après le *n*-ième mouvement. Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire réelle $d_n=x_n-y_n$ c'est-à-dire la fonction $D_n(x)=\sum_k P(d_n=k)x^{k.}$.

N.B. une indication était fournie, mais elle était erronée : même si le cadre général des fonctions génératrices est celui des séries entières, il s'agit ici de sommes finies car $-3n\leq d_n\leq 3n$. La fonction génératrice attendue est **donc une somme finie de monomes** x^k **pour** $k\in\mathbb{Z}$ (**et non** une fonction polynomiale).

Aucune réponse n'a été reçue. La solution suivante, ainsi que le complément, est proposée par Jacques Choné

Pour $i\geq 1$, la variable aléatoire $d_i-d_{i-1}=x_i-x_{i-1}-(y_i-y_{i-1})$ (qui correspond au *i*-ième déplacement) prend les valeurs $-3,\ -1,\ 1,\ 3$ avec la probabilité $\frac{1}{4}$ (on le voit en examinant les huit possibilités équiprobables).

On a, puisque d_0 est la variable aléatoire certaine égale à 0, $d_n=\sum_{i=1}^{n}(d_i-d_{i-1})$.

Notons que d_n est aussi l'abscisse, après le *n*-ième mouvement d'un point se déplaçant sur $\mathbb{Z}$ en partant de 0, chaque mouvement étant un pas de longueur $-3,\ -1,\ 1,\ 3$ avec la probabilité $\frac{1}{4}$ (marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$).

Montrons par récurrence que la fonction génératrice D_n de d_n vérifie :

$$D_n(x)=\left(\frac{1}{4}(x^{-3}+x^{-1}+x+x^3)\right)^n.$$

On a : $D_0(x)=1$ car d_0 est la variable aléatoire certaine égale à 0; la proposition est donc vraie pour $n=0$.

Soit *n* un entier au moins égal à 1; supposons que la proposition est vraie pour $n-1$.

Notons tout d'abord que, les variables aléatoires d_{n-1} et d_n-d_{n-1} étant indépendantes puisque les mouvements successifs sont indépendants, on a, avec $\epsilon\in\{-3,-1,1,3\}$ et pour tout $k\in\mathbb{Z}$:

sommaire

$$\begin{aligned} P(d_n=k \ / \ d_n-d_{n-1}=\epsilon) &= P(d_n - d_{n-1}+d_{n-1}=k \ / \ d_n-d_{n-1}=\epsilon) \\ &= \frac{P(d_n-d_{n-1}+d_{n-1}=k \quad et \quad d_n-d_{n-1}=\epsilon)}{P(d_n-d_{n-1}=\epsilon)} \\ &= \frac{P(d_{n-1}=k-\epsilon \quad et \quad d_n-d_{n-1}=\epsilon)}{P(d_n-d_{n-1}=\epsilon)} = P(d_{n-1}=k-\epsilon) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_k P(d_n=k) \ x^k \\ &= \sum_k \sum_{\epsilon\in\{-3,-1,1,3\}} (P(d_n=k \ / \ d_n-d_{n-1}=\epsilon) P(d_n-d_{n-1}=\epsilon)) \ x^k \\ &= \sum_k \sum_{\epsilon\in\{-3,-1,1,3\}} P(d_{n-1}=k-\epsilon) \ x^{k-\epsilon} x^{\epsilon} \ \frac{1}{4} \\ &= \sum_{\epsilon\in\{-3,-1,1,3\}} \frac{1}{4} x^{\epsilon} \ \sum_k P(d_{n-1}=k) \ x^k \\ &= D_{n-1}(x) \left(\frac{1}{4}(x^{-3}+x^{-1}+x+x^3)\right) \end{aligned}$$

On en déduit, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$D_n(x)=\left(\frac{1}{4}(x^{-3}+x^{-1}+x+x^3)\right)^{n-1}.\left(\frac{1}{4}(x^{-3}+x^{-1}+x+x^3)\right)=\left(\frac{1}{4}(x^{-3}+x^{-1}+x+x^3)\right)^n$$

ce qui termine la démonstration.

Complément

On peut en déduire, pour les premières valeurs de *n*, à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, la probabilité de l'événement "le *n*-ième pas du cavalier aboutit sur la première bissectrice des axes", c'est-à-dire de l'événement $'x_n=y_n'$, i.e. $'d_n=0'$. Puisque, comme on l'a vu, d_n est une somme de nombres impairs, cet événement est impossible si *n* est impair et par exemple avec le logiciel (gratuit) "Euler Math Toolbox", on obtient sa probabilité pour $n\in\{0,2,4,6,8,10,12\}$:

```
>function g(n,x)&=((x^(-3)+x^(-1)+x+x^3)/4)^n;
>&makelist(coeff(expand(g(2*i,x)),x,0),i,0,6)

        1  11   145    2023    7269    425909
 [ 1, - , --, ----- , -------, -------, ---------- ]
        4  64  1024  16384  65536  4194304
```

Il s'agit aussi des probabilités de retour à l'origine dans la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ décrite ci-dessus. Pour avoir le nombre de chemins dans cette marche aléatoire revenant à l'origine après le 2*i*-ème pas, il suffit de multiplier les nombres précédents par 4^{2i} :

```
>&makelist(coeff(expand(g(2*i,x)),x,0)*4^(2*i),i,0,6)
            [1, 4, 44, 580, 8092, 116304, 1703636]
```

Il s'agit de la suite "A005721 Central quadrinomial coefficients" de "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)".

sommaire

Problème du trimestre n°120

Au sujet des tours de Hanoï (proposé par André Stef)

Le problème des tours de Hanoï a été proposé par Edouard Lucas à la fin du XIXème siècle. Voici une description à peine plus générale du problème (n disques au lieu de 64).
On dispose de trois plateaux. On doit déplacer n disques de tailles différentes empilés (en taille décroissante) sur l'un des plateaux vers un autre plateau, en respectant les règles suivantes :

- on ne peut déplacer qu'un disque à la fois,
- on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide (sur un plateau).

Ce problème est très connu. Les questions que l'on peut poser à ce sujet sont :

Comment opérer ces déplacements pour n = 2, 3, 4...?

Comment le faire en un minimun de déplacements ? (question double : quel est le nombre minimum de coups à effectuer pour déplacer ces n disques sur le plateau final ? Donner un algorithme permettant de le faire).

Les réponses sont connues. Ainsi le nombre minimal de déplacements est 2^n - 1. Un algorithme récursif classique réalisant ce minimum est :

algo: déplact de ***n*** disques du plateau **A** vers le plateau **C**, avec l'aide du plateau **B**
DEBUT
SI $n \neq 0$ alors
  FAIRE déplact de ***n-1*** disques du plateau **A** vers le plateau **B**, avec l'aide du plateau **C**
  Déplacer le disque (de taille ***n***) du plateau **A** vers le plateau **C**
  FAIRE déplact de ***n-1*** disques du plateau **B** vers le plateau **C**, avec l'aide du plateau **A**
  fin **SI**
FIN

On lance l'algorithme par l'instruction
FAIRE déplact de ***n*** disques du plateau **1** vers le plateau **3** avec l'aide du plateau **2**
On peut "dérécursifier" cet algorithme (car on peut toujours le faire), des lecteurs se souviennent peut-être l'avoir effectué durant leurs études (en Pascal par exemple).

Enoncé du problème 120

On code les déplacements suivants des disques :

- Si on déplace un disque du plateau 1 vers le plateau 2, on le code : 3
- Si on déplace un disque du plateau 1 vers le plateau 3, on le code : 2
- Si on déplace un disque du plateau 2 vers le plateau 3, on le code : 1
- Si on déplace un disque du plateau 2 vers le plateau 1, on le code : 3
- Si on déplace un disque du plateau 3 vers le plateau 1, on le code : 2
- Si on déplace un disque du plateau 3 vers le plateau 2, on le code : 1

c'est-à-dire qu'on code avec le numéro du plateau non utilisé pour le déplacement.

1) On code un déplacement de n disques. Ce code permet-il de retrouver les déplacements effectués ?
2) On code le déplacement, en 2^n - 1 opérations, de n disques du plateau 1 au plateau 3. Décrire ce code (en le justifiant).

NB: Ce sujet a été l'objet d'un atelier MATh.en.JEANS. au collège de Lamarche en 2010/2011 avec Perrine Schaal.

La rubrique « Problèmes » a un nouveau responsable : André STEF. Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr