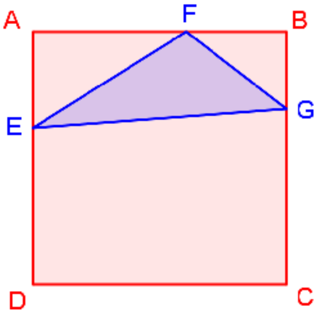
SOLUTION DÉFI COLLEGE n°115



On considère un carré ABCD.
Sur trois de ses côtés, on place les points E, F et G, **distincts des sommets A, B, C et D**.

Comment placer les points E, F, et G pour que le triangle EFG soit :

- un triangle rectangle ?
- un triangle isocèle ?
- un triangle rectangle isocèle ?
- un triangle équilatéral ?

Plus difficile :
La même question, avec une contrainte supplémentaire : E, F et G ne doivent pas non plus être au milieu d'un des côtés du carré.
Quand vous avez trouvé une (ou plusieurs) solution(s), merci de **fournir un « programme de construction »** : soit pour une construction sur papier avec instruments habituels de dessin (en laissant apparents les tracés), soit pour une construction avec un logiciel de géométrie dynamique (en précisant l'ordre des tracés).

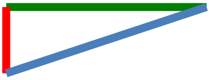
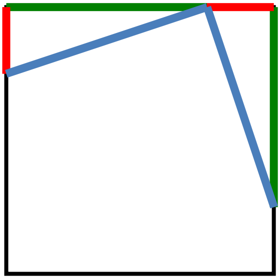
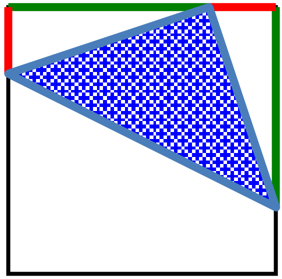
Nous n'avons pas reçu de réponses d'élèves pour ce défi.

Voici quelques éléments de correction, par François.
Pour un **triangle rectangle**, on peut placer les points E et G sur deux côtés opposés du carré. Le cercle de diamètre [EG] coupe les côtés du carré en deux points qui pourront être nommés F1 et F2. L'enseignant saura se persuader de l'existence de ces points. On peut aussi placer les points E et F sur un même côté du carré et tracer la perpendiculaire à (EF) passant par E ou F. Le point G sera alors obtenu.

Pour un **triangle isocèle**, on peut aussi placer les points E et F sur un des côtés du carré, puis tracer la médiatrice du segment [EF]. Le point G sera alors obtenu. Cette construction reste valide si E et F ne sont pas des points du même côté du carré.

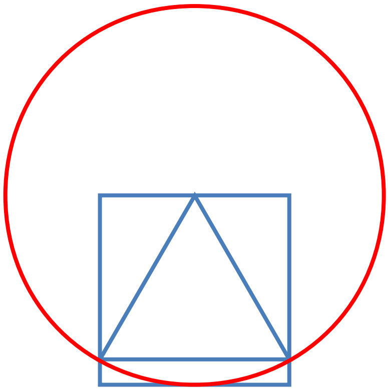
Pour obtenir un **triangle rectangle isocèle**, voici une série de trois dessins (page suivante) : il restera à vous convaincre que le triangle bleu est bien rectangle et isocèle.

retour sommaire

Pour obtenir un triangle rectangle, isocèle ou rectangle isocèle, les milieux des côtés du carré n’ont pas une importance particulière.

Pour obtenir un triangle équilatéral, utiliser le milieu d’un côté facilite les choses. Le cercle tracé a pour rayon le côté du carré. Le centre du cercle et les deux points d’intersection du cercle avec le carré définissent un triangle. On démontrera qu’il est équilatéral.



Pour obtenir un triangle équilatéral sans utiliser le milieu d’un côté du carré, c’est bien difficile pour un élève de collège…

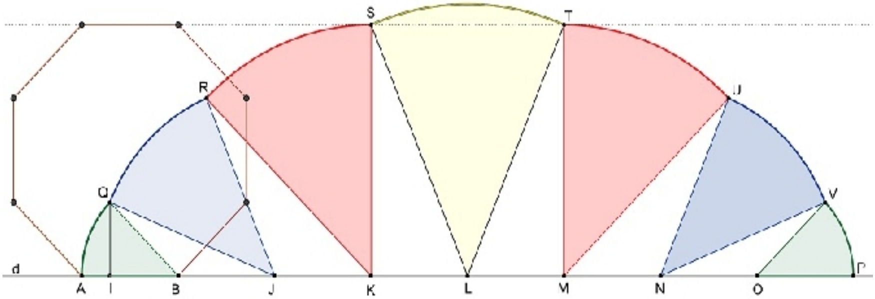
On trouvera des éléments de réponse sur :

http://pilatinfo.org/pilat/sujets/carretour.htm
http://debart.pagesperso-orange.fr/college/triangle_carre.html

Prolongement à MATHs.en.JEANS :
http://mathenjeans.free.fr/amej/labo/sujlab02/forme02l/formes.html

SOLUTION DÉFI LYCEE n°115

Rappel de l'énoncé : un octogone « roule » sur une droite (d). On cherche la longueur de la trajectoire quand il a fait un tour, ainsi que l'aire entre cette trajectoire et la droite d. On prendra AB comme unité.



Calcul de la longueur

La trajectoire est formée de 7 arcs de cercle. Les angles au centre font tous 45° (l'angle que fait l'octogone en tournant) : ce sont donc des huitièmes de cercle.

Le premier arc AQ a pour rayon BA = 1,

Le second arc a pour rayon JQ. JQ² = JI² + IQ². Or $IJ=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $IQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où $JQ=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Le troisième arc a pour rayon $KS=1+\sqrt{2}$

Le quatrième arc a pour rayon LS. LS² = LK² + KS². D'où $LS=\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$

La longueur d'un arc d'un huitième de cercle de rayon r vaut $\frac{1}{4}\pi r$.

D'où $c_1=c_7=\frac{\pi}{4}$, $c_2=c_6=\frac{\pi}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $c_3=c_5=\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{2})$ et $c_4=\frac{\pi}{4}\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$.

La longueur total de la courbe est

$$\boxed{L=\frac{\pi}{4}\left(2\times 1+2\times\sqrt{2+\sqrt{2}}+2\times(1+\sqrt{2})+2\times\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\right)}$$

retour sommaire

Calcul de l'aire

L'aire est formée d'une part des 7 secteurs coloriés, et d'autre part de 6 triangles blancs.

<u>Aire des secteurs</u>

L'aire d'un secteur d'un huitième de cercle vaut $\frac{1}{8}\pi r^2$

Ce qui donne pour les secteurs

$$\frac{\pi}{8}\left(2\times 1+2\times(2+\sqrt{2})+2\times(3+2\sqrt{2})+1\times(4+2\sqrt{2})\right) = \pi(2+\sqrt{2})$$

<u>Aire des triangles</u> (chacun apparaît 2 fois)

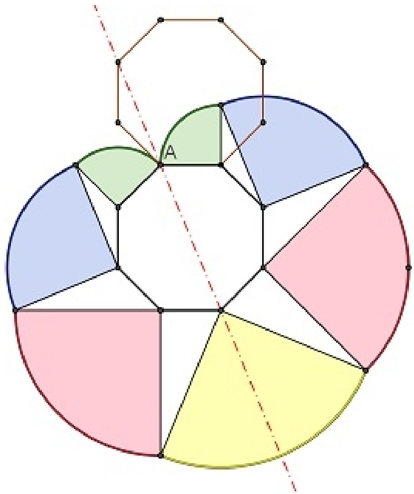
$$2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times 1\times(1+\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{1}{2}\times 1\times(1+\sqrt{2})\right) = 2(1+\sqrt{2})$$

<u>Aire totale</u>

Il ne reste plus qu'à ajouter : $\boxed{A=\pi(2+\sqrt{2})+2+2\sqrt{2}}$

* * * * *

Dans une seconde partie du défi, l'octogone brun tournait autour d'un autre octogone qui restait fixe. On demandait la longueur de cette trajectoire, et l'aire de la surface intérieure à cette trajectoire.



La trajectoire est encore composée de 7 arcs de cercle, mais cette fois ce sont des quarts de cercle : au passage de chaque sommet, l'octogone fait un quart de tour.

Nous vous laissons le soin de faire les calculs !

retour sommaire

DÉFI COLLEGE n°116

Proposé par François DROUIN, du groupe APMEP Maths et Arts

Au « Vent des Forêts »

L'Est Républicain du 14 Juillet 2013 présentait l'œuvre « Globe » de l'artiste belge Maarten Vanden Eynde. L'artiste est monté sur l'œuvre, ce qui est fortement déconseillé au promeneur…

Le globe prémonitoire de l'artiste belge Maarten Vanden Eynde est l'une des nouvelles œuvres monumentales de 2013. En Sortir Photo Daniel WAMBACH

1. Le journaliste annonce un diamètre de plus de 8 m. La photographie nous permet-elle de confirmer ou d'infirmer cette affirmation ?

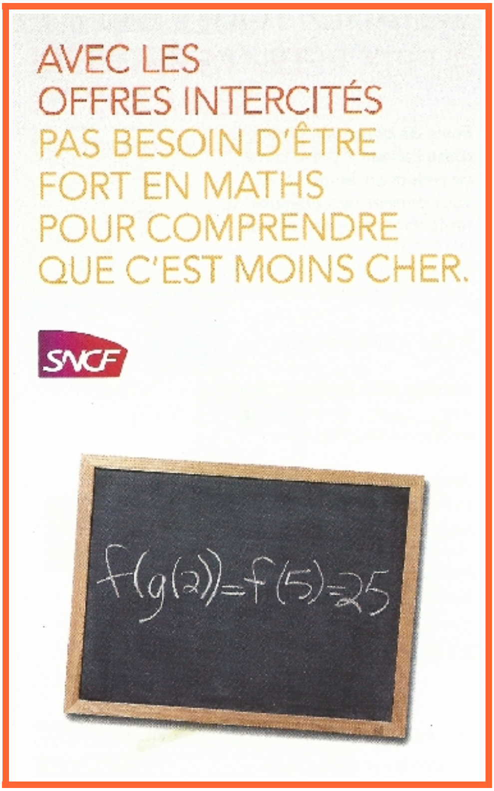
2. Considérons que le diamètre de l'œuvre est 8 m. Si l'artiste avait assemblé un volume double de matériaux, quel aurait été le diamètre du « Globe » ?

retour sommaire

Remarque : tel le bouvier amassant ses déchets, l'artiste a amassé petit à petit ses ferrailles : la boule est « pleine »…

Pour en savoir plus sur le « Vent des Forêts »: http://leventdesforets.org/
Pour en savoir plus sur l'œuvre « Globe » :
http://leventdesforets.org/oeuvre/globe/

DÉFI LYCEE n°116



Ceux qui ont été à Marseille en train ont trouvé ce dépliant publicitaire de la SNCF. Notre défi du mois est le suivant : trouver le plus grand nombre possible de fonctions qui vérifient cette égalité (on se restreindra aux fonctions polynomiales).

Chaque trimestre, le Petit Vert vous propose un DEFI destiné à vos élèves de collège et/ou de lycée. Envoyez toute solution originale de vos élèves, ainsi que toute proposition de défi, à
michel.ruiba@ecopains .net

N.B. Qui n'a rien à voir avec ce défi : il faut certainement être très très fort en maths pour comprendre comment fonctionne l'algorithme des tarifs de la SNCF !

retour sommaire