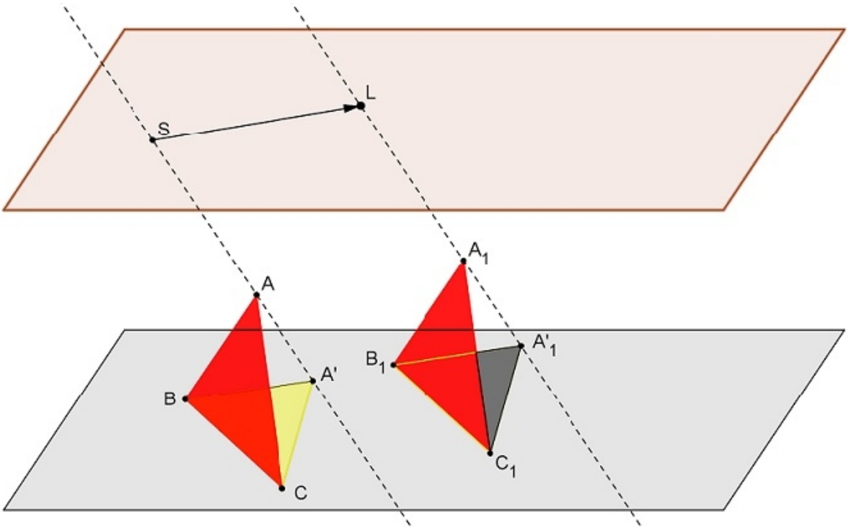
Retour sur la solution du problème n° 114 Ombre d'un triangle

Rappel de l'énoncé : Un triangle quelconque (T) étant donné, est-il toujours possible de le positionner sous une source lumineuse ponctuelle donnée (L) de sorte que son ombre au sol (plan) soit un triangle équilatéral ?

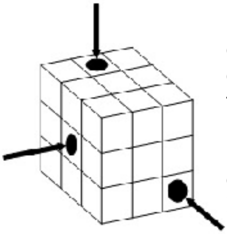
*Nous vous proposons une **solution de Jean-Marie Becker**, enseignant chercheur à Lyon, qui nous est malheureusement parvenue après la parution du Petit Vert n° 115.*

Voici une expérience facile à mener.
Poser le triangle T au sol et noter B et C les points du sol correspondant à deux de ses sommets. Construire aussi au sol un point A' tel que le triangle A'BC soit équilatéral puis faire pivoter d'un certain angle le triangle T autour de son coté BC. On aura choisi l'angle de la rotation de sorte que le point A de l'espace correspondant à la position de son troisième sommet soit encore "sous" la lampe. La droite A'A perce le plan parallèle au sol passant par L en un point S. Il suffit enfin de translater le triangle T du vecteur $\overrightarrow{SL}$ pour obtenir une position solution du problème.



retour sommaire

SOLUTION DU PROBLEME n°115



Rappel de l'énoncé : Dans un cube de côté n (sur la figure ci-contre, $n = 3$), on choisit **au hasard** un des n^2 « petits carrés » de la face supérieure, et on y perce avec un foret un trou perpendiculaire à cette face, qui traverse tout le cube (forage indiqué par une flèche). On fait de même avec un des « petits carrés » de la face de gauche, et un des « petits carrés » de la face de droite.
Il existe alors quatre possibilités : soit les trois forages ont un même « point » d'intersection, soit ils ont deux points d'intersection distincts, soit deux d'entre eux ont un point d'intersection mais ne recoupent pas le troisième, soit ils ne se recoupent pas du tout (c'est d'ailleurs le cas sur la figure ci-dessus). Calculer, en fonction de n, la probabilité de chacune de ces quatre éventualités. Définir leurs limites lorsque n tend vers l'infini.

Remarque préalable

Nous noterons p_1, p_2, p_3 et p_4 les probabilités des 4 cas (dans l'ordre de l'énoncé). Lorsque $n = 1$, il est évident que $p_1 = 1$ et que $p_2 = p_3 = p_4 = 0$. Intuitivement, il apparaît que quand n est très grand, la probabilité p_4 est très proche de 1 (il est fort probable que les trois forages n'aient aucun point commun). On conjecturera donc que, lorsque n tend vers l'infini, $p_4 \to 1$; et par conséquent que p_1, p_2 et p_3 ont pour limite 0. Les calculs qui suivent confirmeront cette conjecture. Le graphique final montre la variation des 4 probabilités en fonction de n (pour n de 1 à 10).
Nous avons reçu des solutions de Jacques Choné et Walter Nurdin.

Voici celle proposée par ce dernier, enseignant à l'ÉSPÉ.

Tout d'abord, puisqu'on choisit au hasard un des n^2 petits carrés de chaque face, on peut supposer qu'on est en situation d'équiprobabilité. Pour calculer les probabilités demandées, on va déterminer d'abord le nombre de cas possibles. On a n^2 positions pour le premier forage, et également n^2 pour le second et n^2 pour le troisième forage. Au total n^6 possibilités.
Premier cas : pour avoir les trois forages qui se rencontrent en un même point on a le choix entre n^2 positions pour le premier forage. On a alors n positions possibles pour le deuxième forage. Pour le dernier forage un seul choix est possible. On a donc n^3 positions favorables.

Pour ce premier cas la probabilité est donc de : $p_1 = \frac{n^3}{n^6} = \frac{1}{n^3}$

Pour le deuxième cas les points d'intersection peuvent être soit sur le premier forage, soit sur le deuxième, soit sur le troisième. On devra donc multiplier par 3 le résultat trouvé pour l'une des possibilités puisque les trois situations sont symétriques. On a n^2 positions possibles pour le premier forage. Le deuxième peut prendre n positions : les n petits cubes traversés par le premier forage. Le troisième forage peut, lui, prendre n-1 positions pour traverser l'un des cubes du premier forage mais pas celui traversé par le deuxième forage. On obtient ainsi : $3n^2 \times n \times (n-1)$ positions favorables.

Ainsi la probabilité est de : $p_2 = \dfrac{3n^2 \times n \times (n-1)}{n^6} = \dfrac{3(n-1)}{n^3}$

Pour le <u>troisième cas</u> le cube intersection peut être obtenu soit par le premier forage et le deuxième, soit par le premier et le troisième, soit par le deuxième et le troisième. On va donc encore multiplier par 3 l'une des possibilités.

Supposons que l'on fasse le calcul pour que l'intersection soit réalisée par le premier forage et le deuxième. On a n^2 positions possibles pour le premier forage et n possibilités pour le deuxième. Maintenant on perd une ligne et une colonne pour le troisième forage. Cela donne $n^2 - n - (n-1)$ trous possibles. Au total : $3n^2 \times n \times (n^2 - n - (n-1))$ positions favorables.

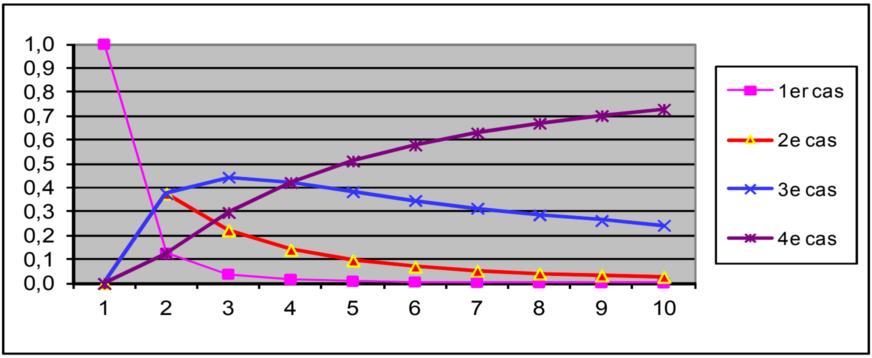
La probabilité est donc de : $p_3 = \dfrac{3n^2 \times n \times (n^2 - 2n + 1)}{n^6} = \dfrac{3(n-1)^2}{n^3}$

Pour le <u>dernier cas</u> on a n^2 positions pour le premier forage. Pour le deuxième forage on a le choix entre n^2-n positions pour ne pas rencontrer le premier forage. Pour que le dernier ne vienne pas forer un des cubes déjà transpercé on n'a le choix qu'entre $n^2 - n - (n-1)$ positions comme pour le cas précédent.

D'où : $p_4 = \dfrac{n^2 \times (n^2 - n) \times (n^2 - 2n + 1)}{n^6} = \dfrac{(n-1)^3}{n^3}$.

On a bien $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.

Jacques Choné nous fait remarquer également que, en notant Xn la variable aléatoire correspondant au nombre d'intersections, on a $E(X_n) = \dfrac{3n^2 - 2}{n^3}$, espérance qui tend vers $3/n$ lorsque $n \to \infty$.



Problème du trimestre n°116

problème proposé par Jacques Choné

Soit n points sur un cercle ($n \geq 4$). A chacune des $\binom{n}{3}$ 3-parties de l'ensemble de ces points, on associe l'orthocentre H_k du triangle formé par ces 3 points et le centre de gravité G_k des n - 3 autres points.

Montrer que les $\binom{n}{3}$ droites (H_kG_k) ainsi obtenues sont concourantes en un point que l'on précisera.

Envoyez votre solution (nous espérons en recevoir une grande quantité), **ainsi que toute proposition de nouveau problème**, à Loïc Terrier (de préférence par courriel, sinon 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE).

Rubrique problème cherche responsable

Depuis mars 2006, c'est Loïc Terrier qui « gérait » la rubrique « Problèmes » du Petit Vert. Il a demandé à en être déchargé. Nous le remercions chaleureusement pour sa collaboration pendant toutes ces années.

La rédaction du Petit Vert est donc à la recherche d'un adhérent qui accepterait de remplir désormais cette tâche. Pour plus de renseignements, contacter jacverdier@orange.fr ou 09.79.54.07.98.

Nous vous rappelons que **tous** les lecteurs sont invités à proposer énoncés ou solutions.

retour sommaire