Problème du trimestre n°114

proposé par Jean-Marie Didry

Un triangle étant donné, est-il toujours possible de le positionner sous une source lumineuse ponctuelle donnée de sorte que son ombre au sol (plan) soit un triangle équilatéral ?
Pire encore : est-il possible de trouver une surface sur laquelle l'ombre de ce triangle est un carré ??

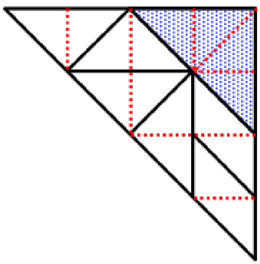
Envoyez votre solution (nous espérons en recevoir une grande quantité), **ainsi que toute proposition de nouveau problème**, à Loïc Terrier (de préférence par courriel, sinon 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE).

SOLUTION DÉFI COLLEGE/LYCEE n°113

Extrait d'une publicité trouvée dans un catalogue de produits surgelés.

C'est un carré qui est découpé (le fabriquant évoque un Tangram et on peut utiliser le "quadrillage" visible sur les pièces pour s'en persuader) ; on suppose que le partage est équitable pour qu'il n'y ait pas de conflit entre les convives (les parts doivent avoir même « taille »).
Est-il possible de retrouver le découpage proposé par le fabriquant (sachant qu'au départ le « gâteau » est carré) ?

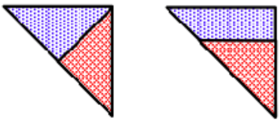
Nous pensions que le gâteau était carré : la légende annonçait « 16 canapés façon Tangram ». Après achat, nous avons dû constater qu'il était rectangulaire (environ 12 cm de long et 10 cm de large)… Mais comme nous avions lancé le défi en proposant de partir d'un carré de 16 cm de côté, nous vous proposons une démarche possible correspondant à ce cas. Elle pourra être adaptée dans le cas d'un gâteau rectangulaire.



retour sommaire

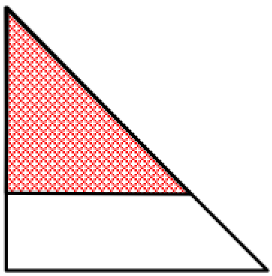
Nous pouvons nous convaincre sans peine que les deux parallélogrammes et les quatre triangles rectangles isocèles identiques ont tous une aire égale à la moitié de l'aire du triangle rectangle isocèle « en haut à droite ».

En considérant l'aire du carré découpé égale à 1, l'aire de chaque petit triangle est 1/16, l'aire de chaque parallélogramme est 1/16, l'aire du triangle « en haut à gauche » est 1/8.
Sur la photo, ce triangle est découpé par un segment parallèle à un des côtés de l'angle droit en deux parts « équitables »

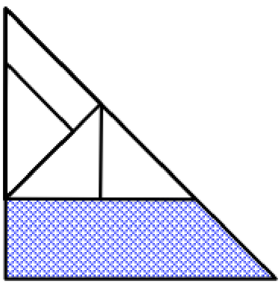


Un tel partage est possible en faisant pivoter le triangle rouge.

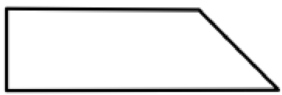
Dans le partage obtenu, le grand triangle a une aire double de celle du grand triangle et est donc un agrandissement échelle √2 du triangle rouge.



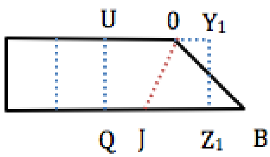
Ce type de découpage va de nouveau être utilisé pour la deuxième moitié du gâteau.
Il reste à découper le triangle rouge en quatre parts équitables et le trapèze rectangle également en quatre parts équitables. *Remarque : le trapèze n'est rencontré ni dans l'enseignement primaire, ni dans l'enseignement secondaire…*



Dans la partie supérieure du dessin ci-contre, un découpage en quatre parts « équitables » est proposé.
Il nous reste à découper en quatre parts « équitables » le trapèze rectangle ci-dessous.



Nous transformons le trapèze rectangle en rectangle de même aire.

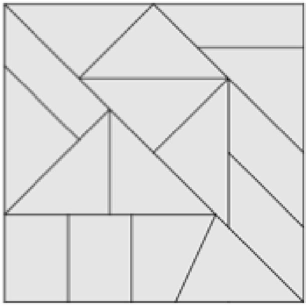


mmaire

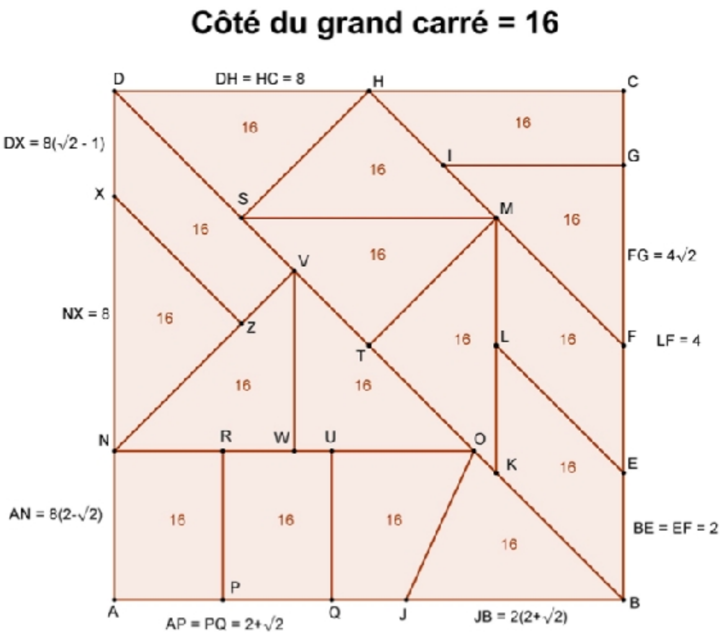
Nous partageons la partie « gauche » du rectangle en deux rectangles de même aire égale à 1/4 de l'aire du rectangle. Il nous reste à partager le trapèze rectangle de la partie droite en deux parts « équitables ».

B est le point de [LK] tel que LB = AJ. [OJ] partage donc le rectangle UY_1Z_1Q en deux parts équitables (OY_1 = QJ). OJB a même aire que OJZ_1Y_1 (et donc que OJQU). Nous avons donc quatre parts équitables dans notre trapèze rectangle.

Voici le découpage final obtenu :

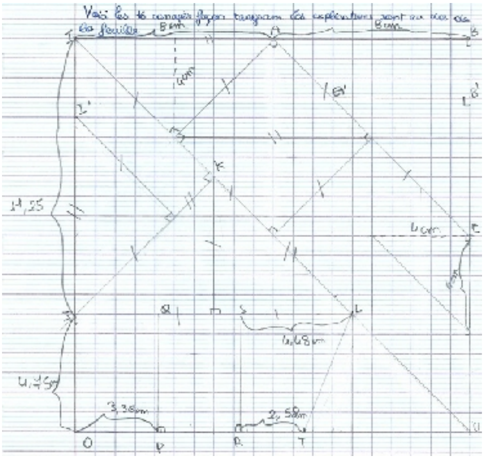


Et, si on est parti d'un carré de 16 cm de côté, voici les dimensions exactes des diverses parts :



retour sommaire

Claire Staub, une adhérente lorraine partie en région parisienne, a proposé ce défi à ses élèves. Elle le leur a donné comme un DM (noté en points bonus sur 5). Au bout de 2 jours, elle en a reparlé et la classe en était arrivée à la conclusion que même taille signifiait même aire et que si l'on partait sur un carré de 16 cm de côté chaque pièce devait avoir une aire de 16 cm². Voici une des solutions, celle proposée par Juliette S., élève de cinquième.



Je vais tout d'abord calculer l'aire d'une part : 16x16 (aire du carré) / 16 (nombre de parts en tout) = 16 cm².

Dans la partie déjà faite, il y a 5 triangles isocèles rectangles de 8 cm de base et 4 cm de hauteur. L'aire de ces triangles est égale à (8x4)/2 = 16 cm². Il y a aussi 2 parallélogrammes d'aire 4 cm (base) x 4 cm (hauteur) = 16 cm². Enfin il y a un trapèze qui est dans le grand triangle ABC d'aire 8 (base) x 8 (hauteur) / 2 = 32cm². Le grand triangle ABC contient le petit triangle A'B'C qui fait 16 cm². Donc forcément le trapèze ABB'A' a une aire de 32 - 16 = 16 cm².

Pour la partie à reconstituer :

Le triangle IJK est rectangle et isocèle en K. IK = KJ = JI' = 8 cm. Le trapèze I'K'KI pour les mêmes raisons que AA'B'B mesure 16 cm² d'aire. [KJ] qui est déjà tracé mesure 8 cm, ensuite j'ai tracé le point L à 8 cm du point K. Le point M est au milieu de [JL]. J'ai donc 2 nouveaux triangles rectangles isocèles de 16 cm².

Dans ce qui reste à tracer d'après la figure, il y a 2 rectangles, 1 trapèze et 1 triangle. Je me suis rendue compte que je ne pouvais plus placer de triangle rectangle isocèle (j'ai déjà fait un test avec des figures découpées). J'ai essayé de placer les figures en calculant les aires à partir des mesures à l'aide d'une règle : IJ = 11,25 donc JO = 16 - 11,25 = 4,75. Dans le triangle LTU l'aire = base x hauteur / 2 = 16. TU x 4,75 x 2 = 16. Donc TU = 6,7 cm (16 / (4,75 / 2). Donc je peux placer le point T.

Pour placer les points P et Q du rectangle, on sait que JO = 4,75 alors OP x 4,75 = 16. Donc on fait 16 / 4,75 = 3,36 cm. Comme ça je place les points QP et RS.

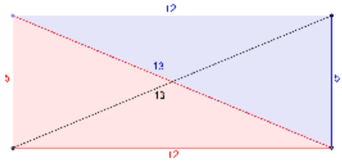
Pour finir, il faut calculer les l'aire du trapèze SLRT. RT est égal à 16 - (3,36 + 3,36 + 6,7) = 2,58. SL = JL (11,2 en mesurant) - (3,36 x 2) = 4,48 cm. L'aire du trapèze SLRT = (2,58 + 4,48) x 4,75 /2 = 16,7 cm². Je n'ai pas trouvé 16 exactement car la mesure de la règle n'est pas très précise, on ne peut aller que jusqu'aux dixièmes.

On ne peut pas vraiment reconstituer ce tangram car le matériel que j'ai utilisé n'était pas très précis !

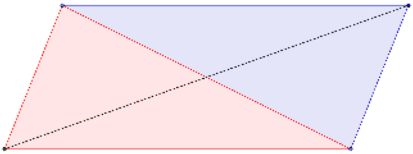
DÉFI COLLEGE/LYCEE n°114

Cédric Villani, lauréat de la médaille Fields en 2010, a donné en novembre 2012 une conférence devant des lycéens de l'académie de Strasbourg intitulée "De l'araignée aux chauves-souris".
À voir : http://utv.unistra.fr/video.php?id_video=213

Au début de cette conférence, Cédric Villani évoque le théorème de Pythagore et l'applique au rectangle ainsi : la somme des carrés des côtés de <u>ce</u> rectangle est égale à la somme des carrés de ses diagonales ➔



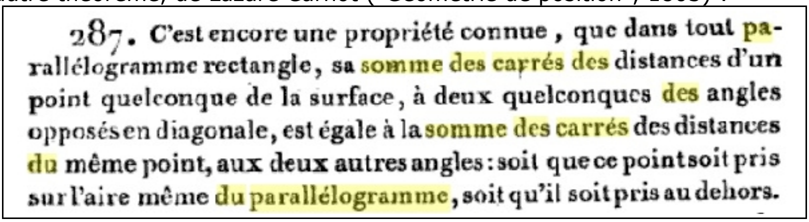
Et il pose la question : cette propriété est-elle vraie pour tout rectangle ?



Cédric Villani poursuit en disant que la propriété ci-dessus s'applique aussi au parallélogramme ! Magique ou fantasque ???
Voici donc **<u>un premier défi</u>** à proposer à nos élèves.

La somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est-elle toujours égale à la somme des carrés de ses diagonales ? Qu'en penses-tu ?

Un autre théorème, de Lazare Carnot ("Géométrie de position", 1803) :

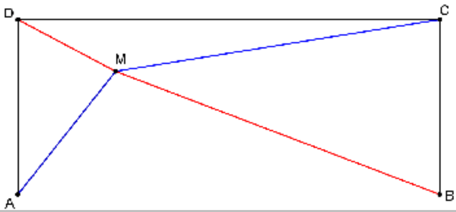


287. C'est encore une propriété connue, que dans tout parallélogramme rectangle, sa somme des carrés des distances d'un point quelconque de la surface, à deux quelconques des angles opposés en diagonale, est égale à la somme des carrés des distances du même point, aux deux autres angles : soit que ce point soit pris sur l'aire même du parallélogramme, soit qu'il soit pris au dehors.

Autrement dit, dans le langage actuel $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

<u>Second défi</u> pour les élèves

1 - Démontrer cette propriété.
2 - Est-elle vraie même si le point M est extérieur au rectangle ? Et même en dehors du plan du rectangle ?
3 - Est-elle encore vraie si on remplace le rectangle par un parallélogramme ?



Chaque trimestre le Petit Vert vous propose un « DÉFI » destiné à vos élèves de collèges et/ou de lycée. Envoyez toute solution originale <u>de vos élèves</u>, ainsi que toute nouvelle proposition de défi, à Michel RUIBA, 31 rue Auguste Prost, 57000-METZ, michel.ruiba@ecopains.net.

retour sommaire