SOLUTION DU PROBLEME n°114

Rappel de l'énoncé : Un triangle étant donné, est-il toujours possible de le positionner sous une source lumineuse ponctuelle donnée de sorte que son ombre au sol (plan) soit un triangle équilatéral ? Pire encore : est-il possible de trouver une surface sur laquelle l'ombre de ce triangle est un carré ??

Nous n'avons reçu que deux solutions pour ce problème, l'une de Jacques Choné et l'autre de l'auteur, Jean-Marie Didry. La réponse aux deux questions est OUI. Nous vous proposons ci-dessous la solution de Jacques Choné pour la première question. La totalité des solutions est disponible sur notre site, rubrique « Le Petit Vert », sous-rubrique « Problèmes ».

Nous traitons la première question par deux méthodes ; la première est très simple mais s'applique seulement si le triangle donné est acutangle et la seconde fait appel au théorème de Desargues mais s'applique dans le cas général.

1. Soit a, b, c les mesures des côtés du triangle donné, supposé ici acutangle et, dans un repère orthonormal d'origine O de l'espace, les points $A(x,0,0)$, B$(0,y,0)$, C$(0,0,z)$. Pour pouvoir identifier le triangle donné au triangle ABC, il suffit que le système :

$$\begin{cases} a^2=y^2+z^2 \\ b^2=z^2+x^2 \\ c^2=x^2+y^2 \end{cases}$$

ait une solution en nombres positifs. Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) \\ y^2=\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2) \\ z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \end{cases}.$$

Or puisque le triangle est acutangle, on a : $b^2+c^2>a^2$, $c^2+a^2>b^2$, $a^2+b^2>c^2$.
Le système étudié a bien une unique solution en nombres positifs et on peut identifier le triangle donné au triangle ABC.
Soit alors u un nombre supérieur à chacun des trois nombres x, y, z ainsi obtenus et les points $A'(u,0,0)$, $B'(0,u,0)$, $C'(0,0,u)$. Le triangle $A'B'C'$ est équilatéral et il est l'image du triangle ABC dans une projection centrale de centre O. On en déduit le résultat demandé (en faisant « tourner » la figure de façon que le plan déterminé par $A'B'C'$ soit horizontal (le sol), que la source lumineuse soit en O et que le triangle donné soit positionné en ABC.

2. Soit ABC le triangle donné, S un point dans son plan et un triangle équilatéral $A'B'C'$ dont les sommets sont respectivement sur les droites (SA), (SB), (SC). La construction en est facile: on choisit un point A' sur la droite (SA), B' est alors l'intersection de la droite (SB) avec l'image de la droite (SC) par la rotation plane de centre A' et d'angle $\pm\frac{\pi}{3}$ (selon le cas de figure) et C' est l'antécédent de B' par cette rotation (Remarque :si B' n'existe pas, on change la position de S).

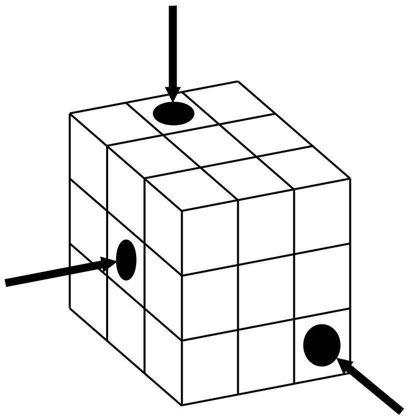
retour sommaire

D'après le théorème (direct) de Desargues les intersections (éventuellement rejetées à l'infini) $U=(BC)\cap(B'C')$, $V=(CA)\cap(C'A')$, $W=(AB)\cap(A'B')$ des droites indiquées sont alignées sur une droite Δ. Considérons alors les images A_1, B_1, C_1 des points A, B, C par une rotation de l'espace d'axe Δ.
Les points $U=(B_1C_1)\cap(B'C')$, $V=(C_1A_1)\cap(C'A')$, $W=(A_1B_1)\cap(A'B')$ étant alignés (sur Δ), d'après la réciproque du théorème de Desargues (dans l'espace) les droites (A_1A'), (B_1B'), (C_1C') sont concourantes en un point S'.
Ainsi, en « positionnant » le triangle ABC donné en $A_1B_1C_1$ (qui en est son image par la rotation), son ombre sous une source lumineuse placée en S' est le triangle équilatéral $A'B'C'$.

Remarque :
Étant donné un quadrilatère plan, il existe une projection centrale qui l'envoie sur un carré. Voir les pages 4 et 8 de « An Introduction to Projective Geometry, IMO Training 2006-2007 » :
http://www.docstoc.com/docs/47390909/An-Introduction-to-Projective-Geometry

Problème du trimestre n°115

proposé par Jacques Verdier



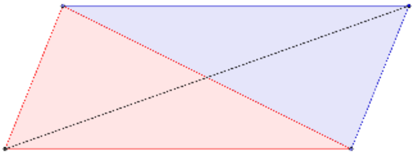
Dans un cube de côté n (sur la figure ci-dessus, $n = 3$), on choisit **au hasard** un des n^2 « petits carrés » de la face supérieure, et on y perce avec un foret un trou perpendiculaire à cette face, qui traverse tout le cube (forage indiqué par une flèche). On fait de même avec un des « petits carrés » de la face de gauche, et un des « petits carrés » de la face de droite.

Il existe alors quatre possibilités : soit les trois forages ont un même « point » d'intersection, soit ils ont deux points d'intersection distincts, soit deux d'entre eux ont un point d'intersection mais ne recoupent pas le

troisième, soit ils ne se recoupent pas du tout (c'est d'ailleurs le cas sur la figure ci-dessus).
Calculer, en fonction de n, la probabilité de chacune de ces quatre éventualités. Définir leurs limites lorsque $n \to \infty$.

Envoyez votre solution (nous espérons en recevoir une grande quantité), **ainsi que toute proposition de nouveau problème**, à Loïc Terrier (de préférence par courriel, sinon 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE).

SOLUTION DÉFI COLLEGE/LYCEE n°114

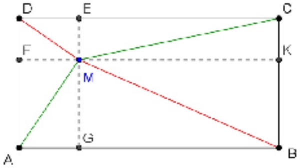


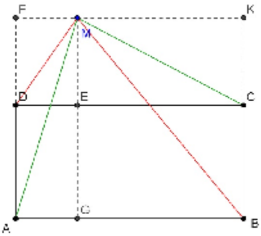
La somme des carrés des côtés d'un rectangle est égale à la somme des carrés de ses diagonales. Mais cette propriété s'applique-t-elle aussi au parallélogramme ?

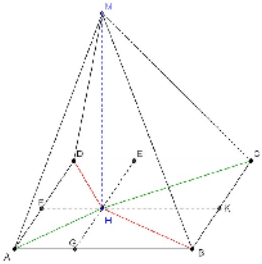
La réponse est **OUI**. Mais ce n'est pas du tout simple à démontrer ! L'exercice avait été proposé dans le bulletin APMEP n°483, et sa solution est en ligne sur la site de l'APMEP :
http://www.apmep.asso.fr/Somme-des-carres-des-cotes-d-un

Beaucoup plus facile à démontrer était la seconde proposition de ce défi :

M étant un point quelconque du rectangle ABCD, a-t-on toujours $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$?
La réponse est OUI, c'est une application directe du théorème de Pythagore, en utilisant les projections orthogonales de M sur les côtés.
C'est encore vrai si le point M est extérieur au rectangle, et même en dehors du plan du rectangle (voir figures).







retour sommaire