

Solution du problème n°111

Faute de place, nous ne pouvons reproduire l'énoncé ici. Merci de vous reporter au Petit Vert n°111 de septembre 2012.

Merci à Jacques Choné, Jean-Marie Didry, Pascal Richard et Jacques Verdier pour leurs solutions. Pour résoudre ce problème, deux écoles s'affrontent : selon la façon de compter, la démarche est assez différente (la deuxième fait intervenir des matrices, ce qui peut être intéressant dans le cadre de la spécialité math) :

Méthode 1 :

Soit a_n le nombre de possibilités si on considère n ($n \in \mathbb{N}^*$) emplacements pour les rayures. On posera $a_0 = 1$. On a $a_1 = 2$ (les 2 codages possibles étant 0 et 1).

Soit n un nombre entier au moins égal à 2. Dénombrons les a_n coquilles différentes avec n emplacements suivant le nombre k' ($0 \leq k' < n$) de rayures fusionnées avec la rayure éventuelle située au n -ième emplacement.

Si $k' = 0$, il y a deux cas pour le dernier emplacement (rayure présente ou absente) et a_{n-1} cas pour les $n-1$ premiers emplacements.

Si $k' \neq 0$, il y a un seul cas pour les $k' + 1$ derniers emplacements ($k' + 1$ rayures fusionnées) et $a_{n-k'-1}$ cas pour les autres emplacements.

Il vient :
$$a_n = 2a_{n-1} + \sum_{k'=1}^{n-1} a_{n-k'-1} = 2a_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k \quad (1).$$

puis, en appliquant (1) à a_{n-1} on en déduit $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} \quad (2).$

On en déduit en particulier $a_5 = 89$, et pour le cas général c'est une suite extraite de la suite de Fibonacci ! $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} ((2-\beta)\alpha^n + (\alpha-2)\beta^n)$. Les escargots aussi flirtent avec le nombre d'or...

Méthode 2 :

Notons x_n le nombre de coquilles de taille n et parmi elles, u_n (resp. v_n) celles se terminant par une bande blanche (resp. noire). Nous avons $x_n = u_n + v_n$, $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$ où les deux dernières égalités se justifient en considérant qu'une coquille de taille $n+1$ s'obtient en rajoutant une bande à une coquille de taille n , laquelle peut être blanche ou noire mais alors avec un phénomène possible de fusion si la dernière bande de la coquille de taille n est noire. Sachant que $u_1 = 1$ et $v_1 = 1$ il en résulte la formule matricielle

$$(x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi trouvons nous quatre-vingt neuf escargots à cinq rayures.

Enfin nous pouvons expliciter x_n en diagonalisant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il

vient, tous calculs faits : $x_n = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$.

Remarques : Jacques Choné nous signale qu'il s'agit de la suite A001519.

On peut aussi trouver une approche en terme de graphes ici :

<http://images.math.cnrs.fr/Bandes-d-escargots.html>

Problème du trimestre n°112

problème proposé par Jean-Marie DIDRY

Étant donné un triangle ABS tel que le sommet S est à l'aplomb du segment ouvert $]AB[$, convenons d'appeler *chapeau de gendarme* de base $[AB]$ et de sommet S toute courbe d'extrémités A et B obtenue par raccordement de quatre arcs de cercle (précisons que par "raccordement" nous entendons une tangente commune au point commun) satisfaisant les conditions suivantes : le premier et le dernier arc sont tangents à la droite (AB) respectivement en A et B et situés à l'aplomb de la base $[AB]$, les deux autres ont leur point de contact en S avec la tangente commune parallèle à la droite (AB) , enfin la courbe présente exactement deux points d'inflexion, l'un au point de contact des deux premiers arcs et l'autre à celui des deux derniers.

Comparer la longueur des chapeaux de gendarme de base et de sommet imposés puis caractériser les chapeaux de gendarme de longueur minimale parmi ceux dont la base et la distance du sommet à cette base sont données.



Chapeau de petite tenue de gendarme de la garde impériale (1857-1869)

Envoyez votre solution (nous espérons en recevoir une grande quantité), **ainsi que toute proposition de nouveau problème**, à [Loïc Terrier](mailto:Loic.Terrier@ars-sur-moselle.fr) (de préférence par courriel, sinon 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE).