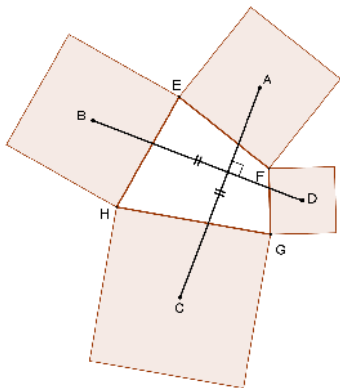


ÉTUDES MATHÉMATIQUES

LE THÉORÈME DE VAN AUBEL (suite)



Dans les pages 117-118 de la brochure « OBJETS MATHÉMATIQUES ¹ », figure le théorème de Van Aubel : EFGH étant un quadrilatère quelconque sur les côtés duquel on a construit extérieurement quatre carrés, le quadrilatère formé par les centres A, B, C, D de ces carrés a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur (voir figure ci-contre). Nous avons présenté cet énoncé dans le Petit Vert n° 97 (mars 2009).

Une des questions posées par des journalistes à Cédric Villani, après qu'il a obtenu la médaille Fields, portait sur ses professeurs de math de troisième et de seconde à qui il avait rendu hommage. Il s'est souvenu de cet exercice donné par son professeur de seconde, qu'il avait mis 2 semaines à résoudre. Et lorsque fièrement il avait soumis sa solution au professeur, ce dernier lui montra qu'on pouvait abrégé et simplifier sa démonstration, le piquant ainsi au vif.

Une abondante littérature concerne ce théorème, publié en 1878 par Henri Van Aubel (professeur de mathématiques à l'Athénée d'Anvers) dans la *Nouvelle correspondance mathématique* sous le titre *Note concernant les centres de carrés construits sur les côtés d'un polygone quelconque*.

Voir (pages 40 à 44) : http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN598948236_0004&DMDID=DMDLOG_0013

Voir aussi sur la toile :

Démonstration géométrique animée :

<http://agutie.homestead.com/files/vanaubel.html>

Démonstration par les complexes :

http://serge.mehl.free.fr/anx/appl_complex_geo.html#sol

Pour en savoir plus :

<http://www.osaka-ue.ac.jp/zemi/nishiyama/math2010/aubel.pdf>

<http://www.ijpam.eu/contents/2011-66-1/7/7.pdf>

Et si vous aviez des précisions sur la biographie de ce Van Aubel, qui semble avoir été professeur à l'Athénée royal d'Anvers au XIX^e siècle, elles sont également les bienvenues.

1 Publication de la Régionale Lorraine APMEP (1996), malheureusement épuisée.

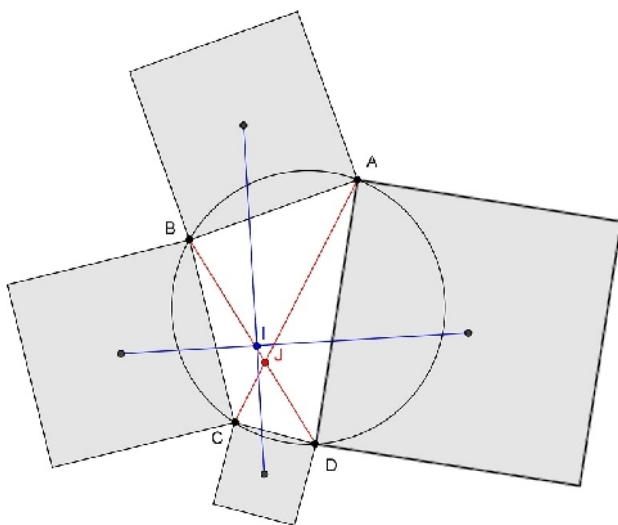
Cet exercice pourrait être proposé à des élèves de lycée, mais en choisissant une formulation plus « ouverte », comme par exemple :

On considère un quadrilatère quelconque ; sur chacun de ses côtés on construit un carré (à l'extérieur de ce quadrilatère).

1 – Que peut-on dire des deux segments dont les extrémités sont les centres des carrés « opposés » ?

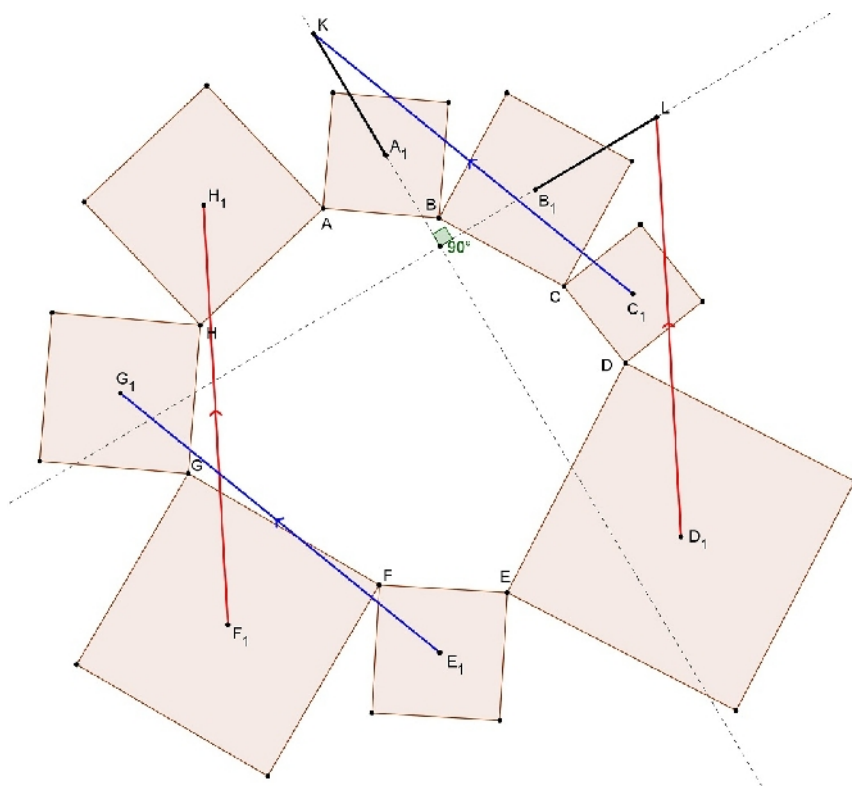
2 – A quelles conditions ces segments sont-ils les diagonales d'un parallélogramme ?

Nous livrons à votre sagacité, en guise de « défi-profs », l'exercice suivant : les quatre points A, B, C et D étant cocycliques, à quelle condition sur le quadrilatère ABCD le point d'intersection J de ses diagonales est-il confondu avec le point I, intersection des segments reliant deux à deux les centres des carrés construits extérieurement sur ses côtés ?



ANNEXE

Dans son article, Van Aubel ne s'intéresse pas seulement aux segments joignant les centres des carrés construits sur un quadrilatère ; il étend sa recherche sur des polygones ayant un nombre quelconque de côtés. Voici une figure illustrant une propriété de l'octogone :



Sur les côtés d'un octogone ABCDEFGH (nous l'avons choisi ici convexe pour la lisibilité, mais ce n'est pas une condition nécessaire), on construit les carrés de centre A_1, B_1 etc.

Construisons le vecteur $\overrightarrow{C_1K}$ égal à $\overrightarrow{E_1G_1}$ et le vecteur $\overrightarrow{D_1L}$ égal à $\overrightarrow{F_1H_1}$. Alors les segments A_1K et B_1L sont perpendiculaires et de même longueur.

N.B. Van Aubel précise que le fait que les carrés soient construits intérieurement et non extérieurement ne modifie pas ces résultats.

Dans certaines versions de ce théorème, on ne considère pas les centres des carrés, mais les sommets des triangles isocèles rectangles construits sur les côtés du polygone initial, ce qui revient exactement au même.