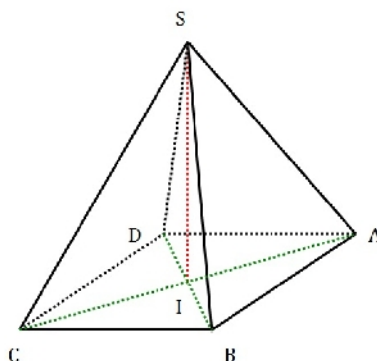


and

SOLUTION DÉFI COLLEGE n°109

Peut-on faire passer une sphère par les cinq sommets d'une pyramide régulière à base carrée ?

La pyramide $SABCD$ est régulière, donc le sommet S est à la verticale de I , point d'intersection des diagonales du carré $ABCD$. On peut en déduire :
 que $(SI) \perp (AC)$ et $(SI) \perp (BD)$; que $SA = SB = SC = SD$; que les triangles SDB et SCA sont isocèles en S ; que la hauteur (SI) est une de leurs médiatrices.



Le cercle circonscrit au triangle SCA décrit une sphère en pivotant autour de (SI) . Le centre de cette sphère est le point d'intersection de la médiatrice de $[SA]$ avec l'axe (SI) . En faisant pivoter le triangle SAI autour de cet axe, le point A occupera successivement les positions B , C et D . Cette sphère répond donc à la question posée.

Remarques

Le centre de cette sphère étant le centre du cercle circonscrit au triangle SAC. Il peut donc être soit à l'intérieur de la pyramide, soit à l'extérieur. Si les triangles SAC et SBD sont rectangles, c'est à dire si la hauteur de la pyramide est égale à la moitié de la longueur d'une des diagonales du carré de base, le centre de la sphère sera le centre I du carré ABCD ; et dans ce cas, on peut inscrire une seconde pyramide "tête bêche" pour former un octaèdre régulier.

Un raisonnement semblable à celui fait précédemment montrerait l'existence d'une sphère passant par les sommets d'une pyramide régulière dont la base est un polygone régulier ayant un nombre quelconque de côtés.

SOLUTION DÉFI LYCEE n°109

En utilisant les dix nombres 10, 9, 8 ... 2, 1 dans cet ordre (ou dans l'ordre inverse), et les opérations addition, soustraction et multiplication, essayer d'obtenir 2012, comme par exemple :

109-8x7+654x3-2-1 (les parenthèses ne sont pas autorisées, mais la « concaténation » des chiffres l'est).

D'après un programme Python conçu par Ahmed Louali

```
def test(n, s=""):
    if n==0:
        if eval(s)==2012:
            print s,"=", eval(s)
    elif s!="":
        test(n-1, str(n))
    else:
        for Op in ["+", "-", "*", ""]:
            test(n-1, s+Op+str(n))
```

```
test(10)
10+9*87-65+4*321 = 2012
10*9*8+7+6-5+4*321 = 2012
109-8*7+654*3-2-1 = 2012
```

Il n'y a donc que trois solutions.

Quelques petites explications : il s'agit ici d'un programme « récursif », qui va tester les $4^9 = 262\,144$ possibilités : entre chacun des nombres de

10 à 1, on intercale un des symboles "+", "-", "*" ou "" (vide, qui correspond à une concaténation).

Chronologiquement, le programme fera ceci :

- > affecter à la chaîne « s » la valeur $s = "10"$ (quand $n = 10$)
- > choisir successivement chacun des 4 symboles (par exemple " $*$ ") à concaténer à la chaîne s (qui devient alors " $10*$ ")

... puis il continuera, en « rappelant » le programme test avec $n-1$ (donc 9) et la nouvelle chaîne s (par ex. " $10*$ ") et ainsi de suite...

Quand il sera arrivé à la fin ($n = 0$), il évaluera la chaîne obtenue (par exemple " $10*9-8765+4+3*2-1$ " qui vaut -8666) et l'imprimera si et seulement si elle vaut 2012.

On pourrait améliorer le programme en le rendant utilisable pour une année quelconque :

on définirait une fonction `test(n, a, s="")`, et on remplacerait à la 3^e ligne 2012 par `a`. L'appel au programme se ferait alors, par exemple, par `test(10,2012)`.

DÉFI COLLEGE n°110

Un berger qui ne compte pas ses moutons

Le jeune Alionel veut devenir berger. Il va trouver monsieur Atanase et lui demande aimablement de le prendre en stage. Ce dernier lui montre un enclos où paissent paisiblement des moutons et lui dit : « *Dans cet enclos, il y a moins de 1 000 bêtes. Si tu permutes le chiffre des dizaines de ce nombre et le chiffre des unités, il y aura 9 têtes de trop ; mais si tu triples le nombre des dizaines, le cheptel augmente de 400 bêtes. Trouve le nombre de moutons qu'il y a dans l'enclos et je t'accepte comme second* ».

Aide l'apprenti berger à se faire embaucher par le pâtre.

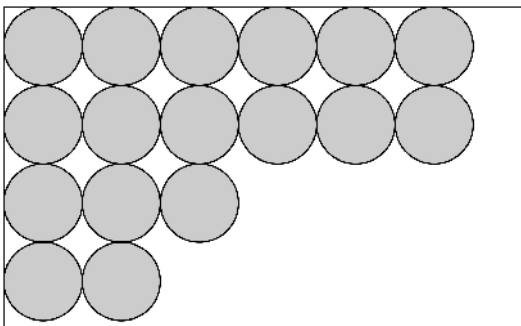


DÉFI LYCEE n°110

On dispose d'une boîte à fond carré de 178,75 mm de côté.

On veut y disposer des pièces de 1 centime (dont le diamètre est 16,25 mm), en les posant à plat sur le fond, les unes à côté des autres sans qu'elles se chevauchent.

Il est évident qu'on peut facilement disposer ainsi 121 pièces, en les plaçant comme ceci :



Mais peut-on faire mieux ?

Chaque trimestre le Petit Vert vous propose un « DÉFI » destiné à vos élèves de collèges et/ou de lycée. Envoyez toute solution originale de vos élèves, ainsi que toute nouvelle proposition de défi, à Michel RUIBA, 31 rue Auguste Prost, 57000-METZ, michel.ruiba@ecopains.net.