ıt, on

Sudokus, suite (et fin ?)

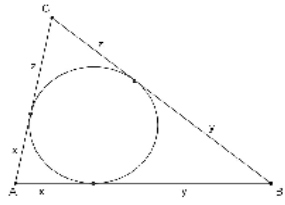
Dans le dernier Petit Vert, nous avions livré à votre sagacité le sudoku ci-dessous, où seulement 17 cases sont données. Au cas où vous n'auriez pas trouvé la solution, la voici (les 17 données sont en gras) :

3	6	7	4	8	5	9	**1**	**2**
4	2	5	3	**9**	1	8	6	7
1	8	9	7	2	6	3	**5**	4
8	**7**	3	**2**	5	4	1	9	6
6	5	1	9	7	3	**4**	2	8
2	9	4	**1**	6	**8**	5	7	3
7	**1**	**8**	6	4	9	2	3	5
9	4	6	5	**3**	2	**7**	8	1
5	3	**2**	8	1	7	6	4	9

retour sommaire

Solution du problème n°109

Rappel de l'énoncé : soit a, b, c les mesures des côtés d'un triangle ABC, s son demi-périmètre, R le rayon de son cercle circonscrit et r le rayon de son cercle inscrit.
Démonter que $a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)\leqslant 9\,R\,r$; dans quel cas a-t-on l'égalité ?



Nous avons reçu deux solutions, l'une de J.-M. Didry, l'autre (ci-dessous) de l'auteur du problème, J. Choné.

Il existe des nombres positifs x, y, z *tels que* $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ *: ce sont les distances des sommets du triangle aux points de contact de son cercle inscrit avec les côtés (voir figure). On en déduit facilement :*

$s=x+y+z$, $s-a=x$, $s-b=y$, $s-c=z$.

On a, en notant S *l'aire du triangle :* $r(a+b+c) \geqslant 2S$ (1) .

Puisque, en notant α l'angle en A du triangle, on a $\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=2R$ et que $S=\dfrac{1}{2}b\,c\sin\alpha$, on obtient $2S=\dfrac{a\,b\,c}{2R}$ (2) .

Avec (1) et (2) on obtient : $r\,R=\dfrac{a\,b\,c}{2(a+b+c)}$.

En remplaçant a, b, c par leurs valeurs en fonction de x, y, z, l'inégalité à démontrer revient à :

$$(y+z)x+(z+x)y+(x+y)z \leqslant \frac{9(y+z)(z+x)(x+y)}{4(x+y+z)} .$$

Cette inégalité est équivalente aux inégalités suivantes, où on notera $\sum x\,y$ *la somme des trois termes semblable à xy et* $\sum x^2 y$ *la somme des 6 termes semblables à x²y :*

$$8(\sum x\,y)(x+y+z) \leqslant 9(2\,x\,y\,z+\sum x^2 y)$$

$$8(3\,x\,y\,z+\sum x^2 y) \leqslant 9(2\,x\,y\,z+\sum x^2 y)$$

$$0 \leqslant -6\,x\,y\,z+\sum x^2 y$$

$$0 \leqslant z(x-y)^2+x(y-z)^2+y(z-x)^2$$

Or cette dernière égalité est vraie, avec égalité si et seulement si $x = y = z$. On en déduit le résultat demandé, l'inégalité se réduisant à une égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

Remarque : ce problème est le premier non résolu dans :
http://mblog1024.wordpress.com/2011/02/14/ravi-substitution-explained

retour sommaire

Problème du trimestre n°110

proposé par Loïc Terrier

Problème tiré de l'excellent « *Mathematics : a concise history and philosophy* » de W.S. Anglin (dont le seul défaut est d'être en anglais).
Une sultane avait l'habitude de partager ses servantes en deux groupes, l'un qui la suivait par rangs de cinq, l'autre par rangs de sept – chaque groupe en formation rectangulaire.
De plus, ces deux groupes devaient être chaque jour constitués d'un nombre différent de servantes, et ce pendant neuf jours consécutifs.
Quel est le plus petit nombre de servantes que la sultane pouvait avoir ?

Envoyez votre solution (nous espérons en recevoir une grande quantité), **ainsi que toute proposition de nouveau problème**, à Loïc Terrier (de préférence par courriel, sinon 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE).

retour sommaire