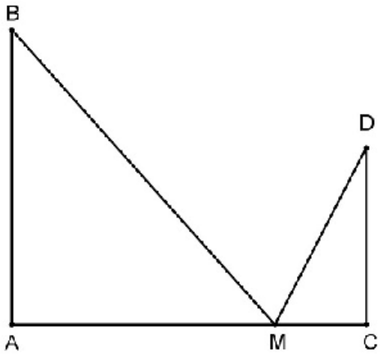
DANS NOS CLASSES

Le problème de l'élastique

Une activité sur les variations de fonctions en seconde

par Denis Scheune
Lycée Varoquaux, Tomblaine

On considère la figure ci-contre.
AB = 5 cm, AC = 6 cm, CD = 3 cm.
Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires tout comme les droites (AC) et (CD).
On considère un anneau très fin, représenté par le point M et pouvant coulisser sur le segment [AC].
Un élastique est fixé aux extrémités B et D et passe par l'anneau.



Comment évolue la longueur de l'élastique en fonction de la position du point M sur [AC] ?

Éléments de contexte

La plupart des élèves que j'ai en classe de seconde souhaite s'orienter vers la filière St2S ; ils sont plutôt en difficulté face aux mathématiques.
J'utilise cette activité pour débuter un chapitre sur les variations de fonctions. Mon intention est de mettre en évidence la notion de croissance et de décroissance d'une fonction. Les élèves devront décrire, de façon précise, les variations de la fonction en jeu dans la situation étudiée. Une seconde activité permettra d'écrire une formulation algébrique générale des variations d'une fonction.
Dans la progression, c'est le deuxième chapitre sur les fonctions. Un premier, « Généralités sur les fonctions », a déjà été traité et, à cette occasion, une activité de recherche d'aire minimale a été donnée (activité adaptée de celle proposée dans le document d'accompagnement).
Les élèves ont déjà utilisé leur calculatrice graphique pour éditer des tableaux de valeurs de fonctions et des courbes de fonctions. Ils ont donc déjà utilisé les outils utiles et déjà mis en œuvre la procédure nécessaire pour résoudre un tel problème. Cette activité est donc également un « test » sur la capacité des élèves à mobiliser ou non l'algébrisation et l'outil fonction.

Concernant l'énoncé

La particularité de l'énoncé tient dans sa brièveté, ce qui donne une activité ouverte. Aucune variable « *x* » n'apparaît dans l'énoncé (sinon, ce ne serait plus un « test »).
C'est une situation classique, que l'on peut utiliser en classe de sixième pour déterminer la position de M sur [AC] pour avoir le plus court chemin entre B, M et D. On utilise alors les propriétés de la symétrie axiale et il s'agit d'un problème de construction.
Dans le cas présent, le théorème de Pythagore permet d'effectuer les calculs de longueurs. Généralement, les élèves sont à l'aise avec ce théorème et les calculs ne posent pas de problème. En fait, l'obstacle est bien d'utiliser ce théorème dans le cas général (avec une variable) et pas uniquement sur des exemples numériques.
La démonstration la plus rapide et la plus élégante pour déterminer le minimum (et la seule possible en classe de seconde) utilise le théorème de Thalès et non l'outil algébrique. Je n'attends pas que les élèves explorent cette piste : la transformation de la figure en utilisant une symétrie axiale est déjà compliquée et la démarche même de l'activité rend très difficile d'avoir l'intuition de revenir à des théorèmes de géométrie plane.
Dans l'énoncé proposé, le minimum est atteint pour AM = 3,75. On peut obtenir une valeur non décimale par exemple pour CD = 4 cm. Ici ce n'est pas très important en fin de compte : ce n'est pas tant le minimum que les variations qui sont importantes.

Mise en œuvre

Cette année, j'ai traité cette activité sur trois séances : j'y consacre une grosse demi-heure lors de la première, la deuxième dans son intégralité et le début de la dernière.

SÉANCE 1

Mise en route

Lorsque je distribue l'énoncé, mon attention est de limiter au maximum le temps de cette phase de lancement. Je m'assure que les élèves ont compris la situation : M est un mobile sur le segment [AC]. Je précise que l'élastique est toujours tendu. Ensuite, je recense les premières idées : sans surprise, une partie des élèves considère que la longueur sera constante, avec l'idée de compensation parfaite entre l'évolution de longueur des deux morceaux de l'élastique. D'autres, au contraire, estiment que la longueur varie, sans en dire plus (difficile d'en demander plus à ce stade de l'activité). Les élèves n'ont fait aucune référence à la « première activité » lors de cette phase.

retour sommaire

Phase de recherche 1 (15-20 minutes)

Je lance ensuite une phase de recherche en demandant aux élèves de prouver leurs premières idées. Je circule dans les rangs, je m'assure « juste » que tous les élèves ont compris la situation. A ceux qui ne démarrent pas, je demande de me dire comment ils pourraient calculer la longueur de l'élastique. La « rumeur » concernant l'utilité du théorème de Pythagore se propage souvent très vite.
Cette année, j'ai eu trois stratégies différentes.
Un élève a essayé de trouver un raisonnement sans calcul pour montrer que la longueur était constante. Sans le décourager, je ne l'ai pas non plus trop encouragé et il a « rapidement » (au bout de 10 minutes) pris à son compte la stratégie dominante : « on prend des valeurs pour AM et on calcule ».
Enfin, 6 élèves (sur 28) considèrent une variable *x* pour AM (pour 4 d'entre eux) ou pour CM.
Plusieurs remarques :

- Il n'y a pas eu de phénomène de porosité entre ces deux dernières stratégies : les élèves qui utilisent une stratégie n'en changent pas.
- Quand je demande aux 6 élèves ce qu'ils feront de la formule, je n'obtiens aucune réponse et toujours pas de lien, ni avec la « première activité », ni avec l'utilisation de la calculatrice graphique.
- Deux élèves voisins font preuve d'astuce : souhaitant montrer que la longueur varie, ils utilisent les deux positions M sur A et M sur C pour limiter les calculs.
- Les élèves qui veulent infirmer que la longueur est constante « s'arrêtent » à deux valeurs de AM. Chaque fois, je leur demande d'être plus précis dans la description de l'évolution de la longueur. Systématiquement, les élèves ont réagi en prenant une autre (ou plusieurs) valeur pour AM.

Je commence la mise en commun quand chaque élève a calculé la longueur pour deux valeurs différentes (ils peuvent échanger leur résultats à deux) et que ceux qui ont choisi une variable *x* ont obtenu une expression algébrique.

Parfois, je regroupe dans un deuxième temps les élèves par méthode ; cette année je voulais aller plus vite, j'ai donc enchaîné sur une phase collective.

retour sommaire

Première mise en commun

Je donne tout d'abord la parole à l'élève qui cherchait une méthode sans calcul pour qu'il précise que cette piste n'a rien donné.
J'envoie ensuite deux élèves noter leurs calculs de longueurs sur des exemples numériques. Au vu du théorème utilisé, les autres élèves contrôlent directement que les calculs proposés au tableau sont justes. J'en profite tout de même pour demander si la comparaison de valeurs approchées est suffisante pour en déduire que les longueurs sont différentes (pour AM = 1, on trouve comme longueur $\sqrt{26}+\sqrt{34}$ et pour AM = 2, on trouve $\sqrt{26}+5$).
Il y a rapidement consensus sur deux points : la longueur de l'élastique varie et les calculs notés au tableau ne permettent pas d'être plus précis sur la description des variations de la longueur.
J'envoie alors deux des 6 élèves (un ayant posé AM = x et un autre CM = x) pour donner leurs expressions : j'ai demandé aux élèves de ne noter que l'expression de la longueur d'un morceau, avec l'idée de faire calculer la longueur du second morceau à tous les élèves pour la séance suivante. Je précise moi-même que cette piste pourrait nous être utile.
Il m'est déjà arrivé de gérer cette mise en commun en étant encore plus neutre. Par exemple, en faisant noter simultanément les différents types de calculs et en demandant aux élèves d'expliciter leurs démarches.

Globalement, ces derniers calculs n'ont pas posé de souci aux élèves. Je demande à nouveau l'intérêt d'avoir l'expression algébrique de la longueur. A ce moment, une élève fait enfin référence à la première activité, à l'édition de tableau de valeurs ou de courbe. A nouveau, je suis sorti de ma neutralité pour appuyer ce que venait de dire l'élève et pour remettre « une couche », en précisant que lors de la séance suivante, nous allions effectivement utiliser des tableaux, des courbes pour répondre à la question posée. Si les autres élèves mesurent la puissance de l'outil algébrique, force est de constater qu'ils le montrent assez peu !!!

Je leur donne à déterminer l'expression complète pour la séance suivante : à partir de cet instant, x représente AM.

retour sommaire

SÉANCE 2

La phase de correction de l'expression est assez rapide. Dans la grande majorité, les élèves ont trouvé l'expression du second morceau. Peu d'élèves ont fait l'erreur de tout noter sous un seul radical. Nous sommes alors tous d'accord sur la formule qui donne la longueur L de l'élastique :

$L(x)=\sqrt{16+x^2}+\sqrt{(6-x)^2+9}$

Ou $L(x)=\sqrt{16+x^2}+\sqrt{x^2-12x+45}$. Je précise que pour la suite, les élèves peuvent utiliser l'une ou l'autre de ces formules.

La phase de correction se termine par le rappel de l'utilisation possible de l'expression comme l'expression d'une fonction. L'ensemble de définition est précisé collectivement. Les choses ne sont pas fluides pour autant : lorsque je demande « Quelle utilisation peut-on faire de la formule ? », plusieurs élèves proposent de « remplacer x par une valeur ». Après avoir obtenu les deux réponses souhaitées, tableaux et courbe, je lance une phase de travail en groupes : ce sont surtout les aspects techniques qui m'ont poussé à regrouper les élèves (par type de calculatrice) en espérant qu'ils réussiront ensemble à surmonter les difficultés de cet ordre. Les élèves disposent d'une fiche technique d'utilisation de la calculatrice (distribuée en début d'année).
Je demande donc aux élèves d'éditer des tableaux de valeurs et/ou des courbes pour répondre avec le plus de précision possible à question.
Pendant la phase de groupe, je m'assure que chaque élève édite au moins une courbe ou un tableau. Je passe de groupe en groupe, fait réfléchir sur la fenêtre choisie, sur les caractéristiques des tableaux produits. Je suis amené à rappeler la fonction trace.

La mise en commun se résume presque à une phase de synthèse puisque chaque groupe est arrivé à peu près au même point.
Je vise deux objectifs pour la mise en commun :

- que les élèves expriment que les tableaux ou la courbe ne peuvent donner que des valeurs approchées : je n'attends pas qu'ils précisent que l'on peut avoir peut-être la valeur exacte du minimum (et c'est en fait le cas ici) sans que l'on puisse en être sûr ;
- que les élèves soient précis dans la formulation des variations et en particulier qu'ils réussissent à préciser les intervalles considérés.

Dans la trace écrite finale, j'utilise une double formulation des variations : la première reprenant le contexte de l'élastique (la longueur de l'élastique diminue…) et une deuxième centrée sur les fonctions mais en langage naturel (la fonction L est décroissante…)
J'ai utilisé un tableur et un logiciel de géométrie dynamique pour cette phase collective.

Pour la recherche du minimum, j'ai donné en fin de séance le cheminement complet de la démonstration. Les élèves ont à rechercher la valeur de ce minimum pour la séance suivante. Nous avons déjà depuis la première séance les valeurs exactes pour $x = 0$ et $x = 6$. La correction, en début de séance 3, n'a pas posé de problème particulier.

Pour conclure

- C'est surtout l'animation de la phase collective de la deuxième séance qui me questionne : j'avais prévu d'envoyer un élève de chaque groupe éditer la courbe et le tableau de valeurs choisis. Je me rends compte rapidement que c'est fastidieux, redondant. Si je dois refaire cette activité, je demanderai des tableaux de valeurs sur transparents (distribués en début de phase à chaque groupe). Après leur présentation par des rapporteurs de groupe, je donnerai, sur polycopié, un tableau de valeurs que j'aurai choisi moi-même. Pour la courbe, j'utiliserai à nouveau un traceur de courbe pour visualiser la courbe en collectif puis je distribuerai une représentation sur papier. Les élèves colleront ces documents avant la synthèse écrite.
- La variante consistant à attendre la séance suivante pour faire cette distribution en m'appuyant sur des réalisations d'élèves me déplait car je crains que le « soufflé ne retombe ».
- C'est une activité que les élèves apprécient et ils s'impliquent volontiers, quel que soit leur niveau.
- Les élèves s'en souviennent, l'idée de variations de fonctions « passe » et cela qui me permet de me servir de cette activité comme « image mentale » lorsque les élèves sont un peu perdus face à des exercices plus abstraits.
- Enfin, c'est peut-être une évidence, mais pour avoir mis en œuvre cette activité à plusieurs reprises, je fais toujours le même constat : l'algébrisation est tout sauf un réflexe pour la plupart des élèves…

N.d.l.r. La société Texas Instruments avait posé ce même problème vers 1995 dans un « Cahier de TP pour la classe de seconde » destiné à promouvoir l'utilisation des calculatrices en classe. Le groupe IREM « Calculatrices au lycée » avait analysé la fiche éditée par Texas et l'avait modifiée. Cette activité du groupe IREM, plus « directive » que celle proposée ici par Denis Scheune, a été publiée dans Le Petit Vert n° 51 de décembre 1997. Elle est disponible sur notre site :
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=ressources