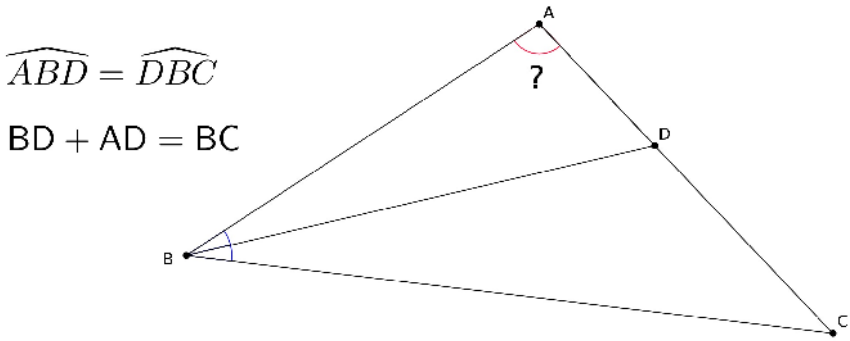
Solution du problème n°108

Rappel de l'énoncé :

Dans Le Monde du mardi existe une excellente chronique de « Jeux mathématiques », destinée à un public assez large mais dont les énoncés peuvent mettre douloureusement à l'épreuve les méninges des professeurs de mathématiques eux-mêmes ! Dans un numéro récent, on trouvait le problème suivant :



Il s'agissait donc de trouver la valeur de l'angle $\widehat{BAD}$ …
Ce problème en lui-même fait appel à des formules de géométrie classique (classique mais plus vraiment enseignée aujourd'hui !) mais les grecs auraient-ils posé un tel problème ? Autrement dit, cette figure est-elle constructible à la règle et au compas ?

Merci à Jean-Marie Didry pour sa solution ! L'énoncé était cependant incomplet (pan sur le bec, comme dirait l'autre), j'avais oublié de préciser que le triangle devait être isocèle !!
Avec l'énoncé complet tel qu'il était dans Le Monde, on trouve que l'angle en A doit être égal à 100°, c'est-à-dire $5\pi/9$, qui n'est pas constructible à la règle et au compas (c'est le problème de la trissection de l'angle...).
Dans le problème tel qu'il a été donné dans le Petit Vert, il y a une infinité de solutions, dont certaines sont constructibles et d'autres pas.
Jean-Marie a proposé deux solutions, voici la plus courte, l'autre est accessible via le site de la régionale :

http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=probleme

retour sommaire

Donnons-nous un segment [AC], un point D à l'intérieur de ce segment et un point B hors de la droite (AC). Pour que le triangle ABC soit solution du problème posé, il faut et suffit que DA/DC = BA/BC (ceci traduit que D est le pied de la bissectrice intérieure de l'angle en B) et que BC – BD = DA, ce qui situe B à l'intersection d'un cercle centré sur la droite (AC) et d'une branche d'une hyperbole d'axe focal la droite (AC). En se plaçant dans un repère orthonormé centré au milieu du segment [CD] et dont l'axe des abscisses est la droite (CD), il est aisé de voir que le système d'équations qui conduit aux coordonnées du point *B* se ramène à la résolution d'équations du deuxième degré. Ce qui amènera à des contraintes sur le positionnement initial du point *D* pour qu'il y ait des solutions (à savoir $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{AD}{AC} < \frac{1}{2}$) et à la possibilité de construire alors celles ci à la règle et au compas.

Ce point de vue nous assure donc la constructibilité à la règle et au compas de tous les triangles solutions du problème initial pour lesquels les nombres *AC* et *AD* sont constructibles.

Problème du trimestre n°109

proposé par Jacques Choné

Soit a, b, c les mesures des côtés d'un triangle ABC, s son demi-périmètre, R le rayon de son cercle circonscrit et r le rayon de son cercle inscrit.
Démonter que $a(s-a)+b(s-b)+c(s-c) \leqslant 9Rr$; dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à Loïc TERRIER, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE, de préférence par mail : loic.terrier@free.fr

retour sommaire