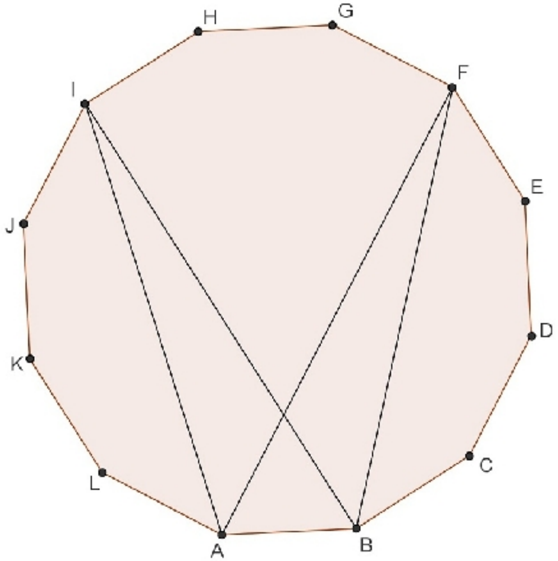
ÉTUDE MATHÉMATIQUE

Quadrature du dodécagone

Renaud DEHAYE
IUFM de Lorraine

Le journal Le Monde présentait il y a quelques temps une rubrique « Affaire de Logique » chaque mardi.
Voici le problème publié le 9 septembre 1997 :

Réarrangez les six morceaux de ce puzzle en forme de dodécagone régulier pour en faire un carré.



Ce problème permet d'envisager un certain nombre de pistes d'exploitation en classe, du cycle 3 au lycée.

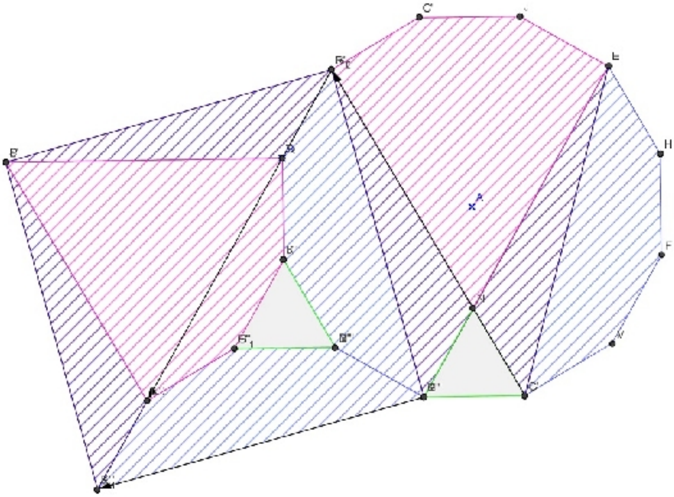
La construction du dodécagone à la règle et au compas

On part de l'hexagone régulier (la rosace est plus parlante…), puis, moyennant une bissectrice, on trouve le 1/12 du contour du cercle que l'on reporte. Reste à construire les 4 cordes pour obtenir les six pièces du puzzle.

retour sommaire

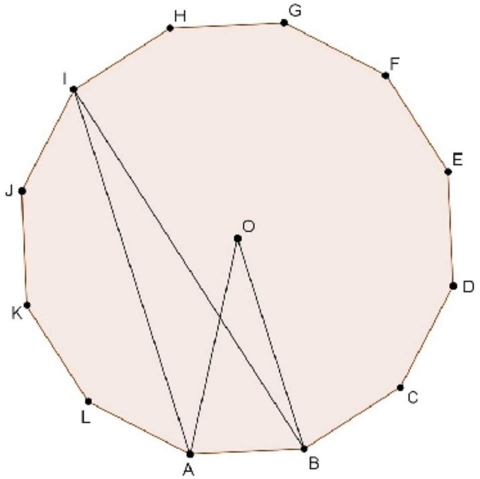
L'assemblage du carré

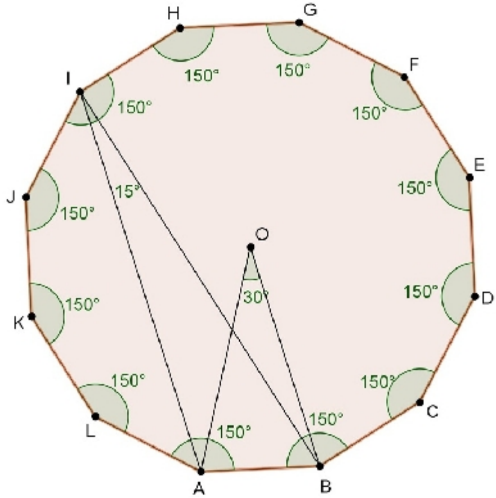
Quelques indications d'angles peuvent apporter une aide significative, car, contrairement à ce qu'on pense spontanément, les angles droits BIH et AFG ne fournissent pas les coins du carré.



Quelques calculs d'angles dans le dodécagone régulier

L'angle au centre $\widehat{AOB}$ mesure 360° : 12 soit 30°, donc l'angle $\widehat{AIB}$ vaut la moitié, soit 15°.

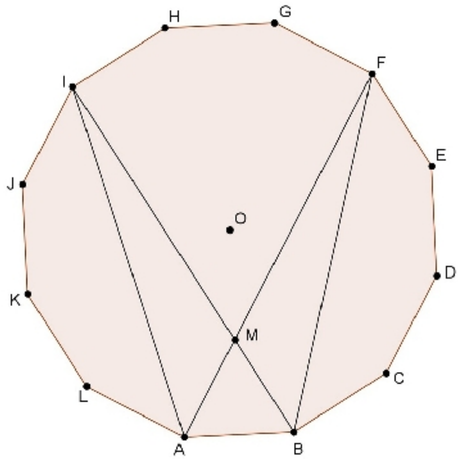




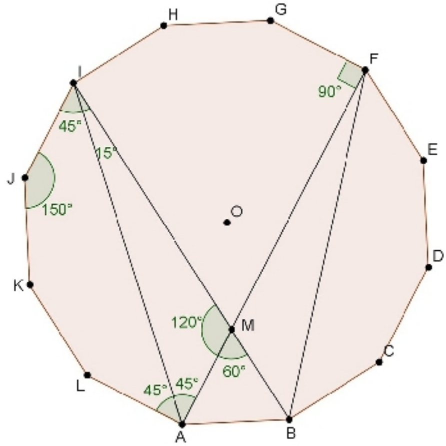
Dans un triangle, la somme des angles vaut 180° ; dans un quadrilatère qui se décompose en 2 triangles, la somme des angles vaut 360° ;......; dans un dodécagone, la somme des angles vaut (12-2) x 180° soit 1800°.
Ainsi, les 12 angles à chaque sommet valent 1800 : 12 = 150°.

Le polygone BIJKLA est un hexagone, la somme de ces angles vaut (6 - 2) x 180° soit 720°. Or quatre de ces angles sont connus et valent 150°, les deux autres, égaux, valent donc (720 – 4 x 150) : 2 soit 60°.
En particulier, $\widehat{ABM}$ vaut 60°.
Le même raisonnement conduit à $\widehat{BAM}$ = 60°.

Le triangle ABM est donc équilatéral.

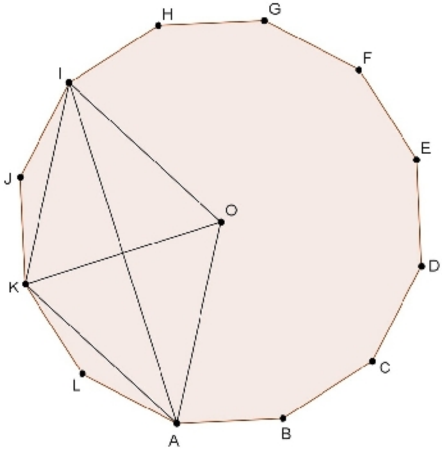


On en déduit aisément les autres angles de la figure :



L'aire du dodécagone régulier de rayon R

Le carré obtenu permet d'envisager le calcul de l'aire sous la forme (coté)^2. Reste à connaitre la longueur AI (ou BF) constituant le coté du carré :



La construction préalable de l'hexagone régulier nous permet de raisonner sur les triangles équilatéraux KOI et OKA.
Ainsi, AI est le double de la hauteur du triangle équilatéral de coté R soit $2 \times R \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou encore $R \times \sqrt{3}$.

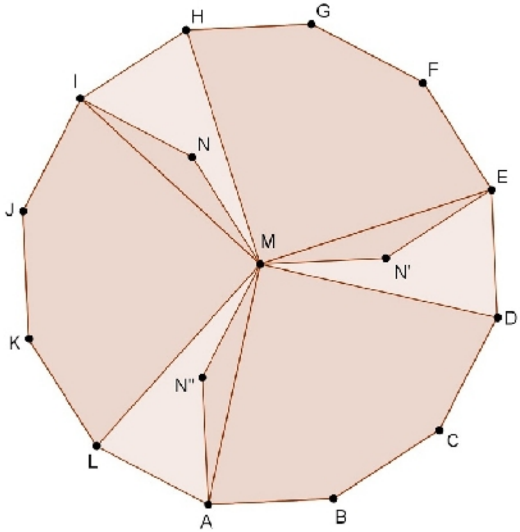
retour sommaire

Ainsi, l'aire du carré donc du dodécagone régulier vaut $3 \times R^2$.

On retrouve une approximation de l'aire du disque, avec Pi = 3.

Cette formule engendre une nouvelle idée : comment découper le dodécagone régulier pour obtenir 3 carrés identiques ?

Ce découpage est connu, semble-t-il, depuis le XIII[e] siècle par des mathématiciens chinois.



Stuart ELLIOTT (1986) a donné le découpage symétrique ci-contre.
La réalisation de la figure est abordable dès le CM2 : les petits triangles isocèles s'obtiennent à l'aide d'alignements (ou au collège avec bissectrices et médiatrices).

Le lecteur pourra se convaincre qu'on obtient bien trois carrés de coté R.

On trouve un autre découpage dans l'ouvrage de Frederickson (la bible des découpages !) : taper « Dodecagon Stuart Elliott » dans Google.

Enfin, pour finir, un mathématicien Hongrois s'est aussi penché sur la question. On lui doit l'horloge de Kurschak, mosaïque que l'on peut construire dès le CM2 et qui permet de retrouver (avec Pythagore) l'aire du dodécagone régulier :
http://clg-haxo-85.ac-nantes.fr/IMG/pdf/LB603D5.pdf

Le Comité de rédaction du Petit Vert s'engage à publier toute activité en classe construite à partir des pistes ouvertes par Renaud DEHAYE.