

## Solution du problème n° 104

*Rappel de l'énoncé : « Je suis un nombre entier. Mon carré se termine par trois fois un même chiffre (différent de zéro). Qui suis-je ? »*

Merci pour les nombreuses solutions, chacune apportant son propre éclairage ! Jacques VERDIER a mis un point d'honneur à ne pas utiliser l'ordinateur pour la recherche des solutions.

Remarquons tout d'abord que le carré d'un nombre supérieur à 10 ne peut se terminer, en base 10, que par 00, 21, 24, 25, 29, 41, 44, 56, 61, 69, 84, 89 ou 96 (résultat largement exploité par Fermat), ce qui ne laisse que 44 comme candidat potentiel. Reste à examiner les nombres  $x$  dont le carré se termine par 444. Jacques prouve également qu'aucun carré ne se termine par 4 chiffres identiques autres que zéro.

La méthode utilisée par Daniel VAGOST, Jacques CHONÉ et Renaud DEHAYE repose tout d'abord sur une prospection des solutions grâce à des logiciels comme R ou Maple (un tableur convient aussi). On remarque que les solutions trouvées : 38, 462, 538, 962, etc... sont toutes de la forme  $\pm 38 + 500k$ .

Ce qui amène deux calculs :

- d'une part, ces nombres sont bien solutions :

$$(\pm 38 + 500k)^2 = 38^2 \pm 38000k + 250000k^2 = (250 \pm 38) \times 1000 + 1444 \equiv 444 [1000]$$

- d'autre part, si  $x$  est une solution, alors  $x \pm 500$  en est une autre :

$$(x \pm 500)^2 = x^2 \pm 1000x + 250000 \equiv x^2 [1000]$$

donc si on connaît les solutions dans l'intervalle  $\llbracket 1, 500 \rrbracket$ , les autres s'en déduisent immédiatement.

### Conclusion :

On a bien trouvé toutes les solutions, à savoir les nombres  $\pm 38 + 500k$ .

Jacques CHONÉ fait remarquer qu'on étudie ici les équations de congruence  $x^2 \equiv a \pmod{1000}$  pour  $a \in \{111, 222, \dots, 999\}$  : s'il existe au moins une solution  $x$  on dit que  $a$  est un résidu quadratique modulo 1000. On peut alors calculer le symbole de Legendre généralisé, qui vaut 1 ou -1 selon que  $a$  est ou non résidu quadratique. Le problème se généralise sans peine à d'autres bases : par exemple, il n'y a pas de solution en base 12, alors qu'en base 7 on a  $(102^7)^2 = 42222^7$  !

## Problème du trimestre n°105

(proposé par Jacques Verdier et Loïc Terrier)

La première question est tirée de la revue russe **Квант** (Quant) de décembre 1991. Site : <http://kvant.mirror1.mccme.ru/>

### Les 50 gangsters



1°) 50 gangsters tirent simultanément. Chacun tire sur le gangster le plus proche de lui (ou sur l'un des plus proches, si plusieurs se trouvent à la même distance de lui\*) et le tue sur le coup.

\* Dans ce cas, le gangster choisit sa cible.

Quel est le nombre maximal de survivants possible ?

2°) On suppose désormais que les gangsters sont représentés par  $n = 50$  points choisis

aléatoirement dans le carré unité (distribution uniforme sur  $[0;1]^2$ ). Que peut-on alors dire de la variable aléatoire « nombre de survivants » ? Que peut-on dire de la proportion de survivants lorsque  $n \rightarrow \infty$  ?

Et pour aller plus loin :

- répondre à la première question en dimension 3 ;
- peut-on généraliser la réponse aux deux premières questions en dimension  $d$  quelconque ?
- l'utilisation d'une autre distance que la distance euclidienne modifie-t-elle les réponses aux questions précédentes ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à Loïc TERRIER, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE, de préférence par mail : [loic.terrier@free.fr](mailto:loic.terrier@free.fr)