ÉTUDE MATHÉMATIQUE

Bijections de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$

Jacques CHONÉ (Chamalières)

Introduction

Pour comparer les « tailles » de deux ensembles, on dispose de la notion d'équipotence : si les éléments des ensembles E et F peuvent être appariés de façon qu'à chaque élément de E corresponde un unique élément de F et qu'à chaque élément de F corresponde un unique élément de E (c'est-à-dire s'il existe une bijection de E dans F), on dit que les ensembles E et F sont équipotents. Cette notion coïncide pour les ensembles finis avec l'égalité de leurs nombres d'éléments. Cantor a étendu cette notion aux ensembles infinis. Mais il apparaît alors des choses étranges. En effet, alors que de façon évidente, si un ensemble est fini, il ne peut être équipotent à l'une de ses parties propres (c'est-à-dire à l'un de ses sous-ensembles autre que lui-même), ce n'est plus le cas pour les ensembles infinis. Par exemple l'ensemble $\mathbb{N}$ *des entiers naturels est équipotent à l'ensemble* $2\mathbb{N}$ *des entiers naturels pairs, comme le montre la bijection :* $n \rightarrow 2n$.

Les deux premiers grands résultats de Cantor sont que l'ensemble $\mathbb{Q}$ *des nombres rationnels est équipotent à* $\mathbb{N}$ *alors que l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels ne l'est pas.*

L'objet de la présente étude est de montrer que, pour tout entier entier naturel k au moins égal à 2, les ensembles $\mathbb{N}^k$ *et* $\mathbb{N}$ *sont équipotents, en explicitant une bijection de l'un vers l'autre ainsi que la bijection réciproque. En général, pour k = 2, on effectue cette opération en listant les éléments de* $\mathbb{N}^2$ *suivant les diagonales successives :*

$$(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (3,0), (2,1), (1,2), (0,3) \ldots.$$

Ce procédé géométrique peut se généraliser pour $k \geq 3$ *: voir le problème du trimestre n°103 du Petit Vert. On propose ici une autre méthode basée sur la décomposition en facteurs premiers des entiers naturels non nuls.*

On commencera par les cas k = 2 (très simple) et k = 3 où on donnera, au passage, une formule fournissant le p-ième nombre divisible ni par 2 ni par 3. Le cas k = 4 sera ensuite traité de façon explicite mais en l'absence de formule fournissant le p-ième nombre divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5. Le cas général sera enfin présenté au moyen du logiciel Maple. A partir du cas k = 3, on utilisera la formule du crible (ou de Poincaré) donnant le nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles en fonction des nombres d'éléments de leurs différentes intersections.

Étude du cas *k* = 2

L'application f_2 définie par $\boxed{f_2(m,n)=2^m(2n+1)-1}$ *est bien une application de* $\mathbb{N}^2$ *dans* $\mathbb{N}$ *. La bijectivité de f_2 résulte du fait que tout entier naturel non nul est d'une unique façon le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair.*
On a $f_2^{-1}(0)=(0{,}0)$ *. Soit* $b\in\mathbb{N}^*$ *. Notons $v_2(b+1)$ l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de b+1 ; on a alors :*

$$\boxed{f_2^{-1}(b)=\left(v_2(b+1)\ ,\ \frac{1}{2}\left(\frac{b+1}{2^{v_2(b+1)}}-1\right)\right)}\ .$$

Par exemple, comme $v_2(2012) = 2$, on obtient, $f_2^{-1}(2011)=(2\ ,\ 251)$.

Étude du cas *k* = 3

Soit l'application f_3 de $\mathbb{N}^3$ *dans* $\mathbb{N}$ *définie par :*
$f_3(m,n,p)=2^m\,3^n\,a_p-1$ *où* $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *est la suite ($a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, ...) des entiers naturels divisibles ni par 2, ni par 3 c'est-à-dire congrus à 1 ou à 5 modulo 6. Sa bijectivité résulte du fait que tout entier naturel non nul est d'une façon unique le produit d'une puissance de 2, d'une puissance de 3 et d'un entier ne contenant pas de 2 ni de 3 dans sa décomposition en facteurs premiers.*
On a pour tout $q\in\mathbb{N}$ *: $a_{2q} = 1+6q$ et $a_{2q+1} = 5+6q$ donc, pour tout* $p\in\mathbb{N}$ *,*
$a_p=\frac{1}{2}\left(6p-(-1)^p+3\right)$ *(vérification immédiate). Ainsi une bijection, f_3 de* $\mathbb{N}^3$ *dans* $\mathbb{N}$ *est définie par :*

$$\boxed{f_3(m,n,p)=2^m\cdot 3^n\cdot\frac{1}{2}\left(6p-(-1)^p+3\right)\ -\ 1}\ .$$

On a $f_3^{-1}(0)=(0{,}0{,}0)$ *. Soit* $b\in\mathbb{N}^*$ *. Notons $v_2(b+1)$ et $v_3(b+1)$ les exposants de 2 et de 3 dans la décomposition en facteurs premiers de b+1. On a alors, en notant* $c=\frac{b+1}{2^{v_2(b+1)}3^{v_3(b+1)}}$ *et* $\lfloor\ \rfloor$ *désignant la partie entière :*

$$\boxed{f_3^{-1}(b)=\left(v_2(b+1)\ ,\ v_3(b+1)\ ,\ c-\left\lfloor\frac{c}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{c}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c}{6}\right\rfloor-1\right)}\ ,$$

car pour avoir le rang du c-ième entier non nul qui n'est ni multiple de 2, ni multiple de 3, il faut retirer à c le nombre de multiples de 2 non nuls inférieurs ou égaux à c, le nombre de multiples de 3 non nuls inférieurs ou égaux à c et rajouter le nombre de multiples de 6 non nuls inférieurs ou égaux à c.
Par exemple, comme $v_2(2012) = 2$ et $v_3(2012) = 0$,
on obtient $f_3^{-1}(2011)=(2\ ,\ 0\ ,\ 167)$.

retour sommaire

On vérifie que $f_3(2,0,167)=2^2\cdot 3^0\cdot\frac{1}{2}(6\cdot 167-(-1)^{167}+3)-1=2011$.

Étude du cas *k* = 4

Soit l'application f_4 *de* $\mathbb{N}^4$ *dans* $\mathbb{N}$ *définie par :*

$f_4(m,n,p,q)=2^m\,3^n\,5^p\,b_q-1$ *où* $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ *est la suite (*$b_0=1$*,* $b_1=7$*,* $b_2=11$*,* $b_3=13$*, ...) des entiers naturels divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, c'est-à-dire congrus à 1 ou 7 ou 11 ou 13 ou 17 ou 19 ou 23 ou 29 modulo 30. Sa bijectivité résulte du fait que tout entier naturel non nul est d'une façon unique le produit d'une puissance de 2, d'une puissance de 3, d'une puissance de 5 et d'un entier ne contenant ni de 2 ni de 3 ni de 5 dans sa décomposition en facteurs premiers. Ici, faute de formule plus explicite, nous définirons la suite* $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ *par ses 8 premières valeurs (8= Φ(30), nombre de nombres inférieurs à 30 et premiers avec lui) :*

q	0	1	2	3	4	5	6	7
b_q	1	7	11	13	17	19	23	29

et pour tout $q\in\mathbb{N}$ *:* $b_{q+8}=b_q+30$*. (Pour d'autres modes de définition voir la référence 3).*

On a ainsi défini une bijection de de $\mathbb{N}^4$ *dans* $\mathbb{N}$.

On définit la bijection réciproque de la même façon que pour le cas k = 3 : on a $f_4^{-1}(0)=(0,0,0,0)$ *. Soit* $b\in\mathbb{N}^*$ *. Notons* $v_2(b+1)$*,* $v_3(b+1)$*,* $v_5(b+1)$ *les exposants de 2, de 3 et de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de b+1.*

On a alors, en notant $c=\frac{b+1}{2^{v_2(b+1)}3^{v_3(b+1)}5^{v_5(b+1)}}$ *et* $\lfloor\ \rfloor$ *désignant la partie entière :*

$$\boxed{f_4^{-1}(b)=\left(v_2(b+1),v_3(b+1),v_5(b+1),c-\left\lfloor\frac{c}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{c}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{c}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c}{6}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c}{10}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c}{15}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{c}{30}\right\rfloor-1\right)}\ .$$

On obtient ainsi $f_4^{-1}(2011)=(2,0,0,134)$

et on vérifie que $f_4(2,0,0,134)=2011$*.*

Étude du cas général avec Maple

On commence par écrire un programme donnant l'exposant e(p,n) du nombre premier p dans la décomposition en facteurs premiers de n :

```
> restart:with(numtheory):
> e:=proc(p,n) local k,m;k:=0;m:=n; while type(m/p,integer)
        do m:=m/p;k:=k+1 od; return k end:
```

retour sommaire

Ensuite, au nombre entier naturel k non nul, on associe :

p(k) : le produit des k premiers nombres premiers,
l(k) : la liste des $\Phi(p(k))$ nombres premiers avec *p(k)* inférieurs à *p(k)* (Φ est la fonction indicatrice d'Euler),
a(k,n) : la suite dont les $\Phi(p(k))$ premiers termes (à partir de 0) sont les premiers nombres premiers avec *p(k)* puis définie pour $n \geq \Phi(p(k))$ par
$a(k,n) = a(k, n - \Phi(p(k))) + p(k)$:

```
> p:=k->product(ithprime(i),i=1..k):
> l:=proc(k) local ll,i,j;ll:=[1];for i from 2 to phi(p(k)) do j:=op(-1,ll)+1;
   while(evalb(igcd(j,p(k))<>1)) do j:=j+1  od; ll:=[op(ll),j] od;return(ll) end:
> a:=(k,n)->if n<phi(p(k)) then l(k)[n+1] else a(k,n-phi(p(k)))+p(k) fi:
```

On associe enfin bijectivement à une liste l de k entiers naturels l'entier naturel *f(k,l)* (c'est l'application cherchée):

```
> f:=(k,l)->product(ithprime(i)^l[i],i=1..k-1)*a(k-1,l[k])-1:
```

Exemples:

```
> [f(2,[2,251]),f(3,[2,0,167]),f(4,[2,0,0,134]),f(4,[1,2,3,4])];
                    [2011, 2011, 2011,38249]
```

Étude de la fonction réciproque.

La liste g(m,k) donne les $\binom{k}{m}$ *produits des m éléments des différentes m-parties de l'ensemble des k premiers nombres premiers.*

```
> with(combinat):g:=proc(m,k) local u,i;
          u:=choose([seq(ithprime(i),i=1..k)],m);
          seq(mul(op([i,j],u),j=1..m),i=1..nops(u)) end:
```

La fonction réciproque associe à tout entier naturel n la liste *finv(k,n)* de k entiers naturels : noter qu'on utilise la formule du crible (ou de Poincaré) pour définir le rang du premier nombre divisible par aucun nombre premier autre que les k-1 premiers (voir le cas k = 4 explicité ci-dessus).

```
> finv:=proc(k,n) local c,i,j,cc;if n=0 then return([seq(0,i=1..k)]) else
  c:=(n+1)/mul(ithprime(i)^e(ithprime(i),n+1),i=1..k-1);
  cc:=c+add((-1)^i*add(floor(c/[g(i,k-1)][j]),j=1..nops([g(i,k-1)])),i=1..k-1);
  return([op([seq(e(ithprime(i),n+1),i=1..k-1)]),cc-1]) fi end:
```

Exemples:

```
> seq(finv(i,2011),i=2..5);
     [2, 251], [2, 0, 167], [2, 0, 0, 134], [2, 0, 0, 0, 115]
> seq(finv(i,999),i=2..5);
       [3, 62], [3, 0, 41], [3, 0, 3, 0], [3, 0, 3, 0, 0]
```

retour sommaire

Références:

1. David M. Bradley, *Counting Ordered Pairs*, Mathematics Magazine n°83 (2010) p. 302 (publication de The Mathematical Association of America)

2. Suite A007310 de *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* : http://oeis.org/A007310 .

3. Suite A007775 de *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* : http://oeis.org/A007775 .

4. Weisstein, Eric W. "Rough Number." From MathWorld, a Wolfram Web ressource : http://mathworld.wolfram.com/RoughNumber.html

JN 2012 à Metz CONCOURS D'AFFICHE

La régionale Lorraine organisera les Journées nationales de l'APMEP en 2012 à Metz. En octobre 2011, lors des prochaines Journées à Grenoble, nous distribuerons aux participants «l'affiche de « nos » journées, affiche que l'on retrouvera également jointe au BGV de présentation de mai 2012.

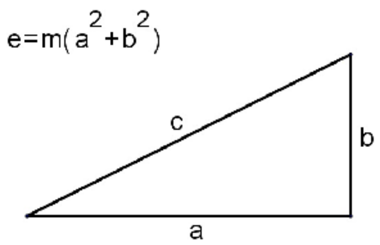
A cette occasion, l'APMEP a envoyé en septembre dernier un courrier destiné aux professeurs de mathématiques, d'arts plastiques et aux professeurs d'école, leur proposant de faire réaliser cette affiche par leurs élèves (comme nous l'avions fait pour les précédentes Journées de Gérardmer en 1999).

Il est encore temps de participer à ce concours : **toutes les modalités sont dans le Petit Vert n° 103 de septembre 2010.**
Les critères de choix seront l'originalité, l'adaptation au thème et/ou à la région, la lisibilité.

Nous vous rappelons que les productions doivent être envoyées **avant le 1er mai** 2011 à l'adresse suivante :

APMEP Concours d'affiche, chez Ghislaine BURKI
41 rue du 16ème B.C.P., 54800 LABRY
burkighis@aliceadsl.fr

La proclamation des résultats est prévue pour début juin 2011. Prix offert à la classe gagnante : un lot de livres et l'affiche plastifiée grand format.



Le théorème d'Einstein-Pythagore

Si vous découvrez ce théorème lors de notre Journée régionale, vous devrez le démontrer à vos élèves le surlendemain !