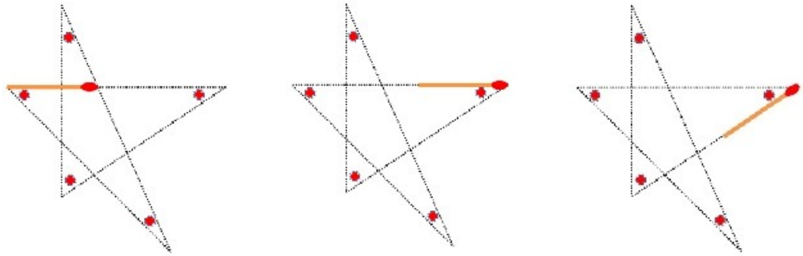
SOLUTION DÉFI COLLEGE n°107

Nous demandions quelle est la somme des angles de l'étoile à cinq branches.
François nous propose une « preuve sans mots » (*pour en savoir plus à ce sujet, rendez-vous à la conférence de Xavier VIENNOT lors des Journées nationales Apmep en octobre 2012 à Metz*) :
Je prends une allumette, je la fais glisser sur un des segments de l'étoile. Arrivé à l'extrémité du segment, je la fais pivoter pour la faire glisser sur un autre segment. Je continue ma promenade sur l'étoile et je reviens sur le segment de départ :

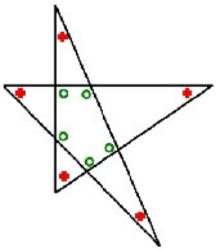


retour sommaire

Finalement, l'allumette a pivoté d'un demi-tour. La somme des angles de l'étoile est donc égale à 180°.

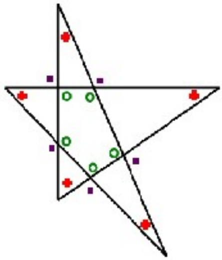
…/…

Une autre solution de François, basée sur les angles :



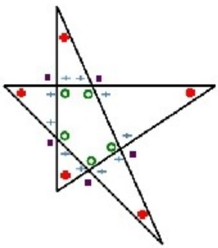
On cherche la somme des angles « croix rouges ». La somme des angles « ronds verts » est égale à 3 fois 180° (pour cela, décomposer le pentagone intérieur en 3 triangles).

La somme des angles « carrés violets » est aussi égale à 3 fois 180° (opposés par le sommet aux « ronds verts »).



La somme de tous les angles codés sur la fig suivante est égale à 5 fois 180° (la somme des angles des triangles formant les pointes) plus 6 fois 180° (la somme des angles du pentagone central et de leurs angles opposés par le sommet). La somme de tous les angles codés est donc égale à 11 fois 180°.

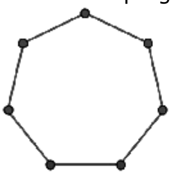
La somme des angles codés sur la figure est également égale à 5 fois 360° (la somme des angles autour des sommets qui ne sont pas des pointes de l'étoile) plus la somme des angles formant les pointes de l'étoile. La somme des angles codés est donc égale à 10 fois 180° plus la somme des angles formant les pointes de l'étoile.

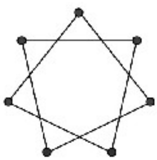


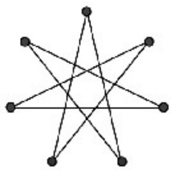
En utilisant ce qui est écrit dans le paragraphe précédent, j'en déduis que la somme des angles formant les pointes de l'étoile est égale à 180°.

Pour aller plus loin…

Intéressons-nous de manière plus générale aux « polygones étoilés ». Et pour simplifier, restreignons-nous à ceux obtenus à partir d'un polygone régulier. Joignons les sommets d'un tel polygone de 1 en 1, puis de 2 en 2, de 3 en 3 etc. Exemple avec l'heptagone ; nous obtenons trois figures différentes :

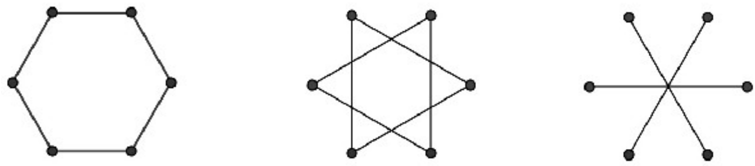






Faisons la même chose avec un hexagone :

retour sommaire



Nous constatons que les « objets » ci-dessus ne peuvent pas toujours se tracer d'un seul trait de crayon.
Dans la littérature, les « polygones étoilés » se restreignent le plus souvent aux seuls qui peuvent se tracer d'un seul trait de crayon (un polygone est une figure géométrique plane formée d'une suite cyclique de segments consécutifs) ; dans ce cas les deux derniers tracés ci-dessus n'en seraient pas. On les appelle parfois « polygrammes ».

Mais comment appeler alors l'ensemble de ces figures ? Des « stellations » ? Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Stellation
Et http://en.wikipedia.org/wiki/Star_polygon (en anglais).

Jean-Paul Delahaye, dans son livre « Merveilleux nombres premiers. Voyage au cœur de l'arithmétique » (éditions Belin), les nomme cependant tous « polygones étoilés » et les évoque à propos des nombres premiers :
Soit n le nombre de côtés d'un polygone, et joignons ses sommets de m en m ($m<n$). On constate que si (et seulement si) n est premier, tous les polygones tracés en joignant ses sommets de m en m sont d'un seul tenant.
D'où une définition « géométrique » possible des nombres premiers :
Un nombre n est premier si (et seulement si) tous les « polygones étoilés » à n sommets (obtenus en joignant les n points de m en m) peuvent être tracés sans lever le crayon.

Voir aussi http://www.apmep.asso.fr/Nantes-sujet-3

■

SOLUTION DÉFI LYCEE n°107

n est un nombre premier différent de 2 et de 3. Montrer que n²-1 est un multiple de 24.

Tout nombre n peut s'écrire sous la forme $n = 3k$, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$. Dans le premier cas, ce ne peur être un nombre premier.
Si $n = 3k+1$, alors $n^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3k(k + 2)$: c'est un multiple de 3.
Si $n = 3k+2$, alors $n^2 - 1 = 9k^2 + 12k = 3k(k + 4)$: c'est un multiple de 3.
Donc n est multiple de 3.
Par ailleurs, tout nombre n s'écrit $n = 4q$, $n= 4q+1$, $n = 4q+2$ ou $n = 4q+3$. Seule la seconde et la quatrième forme peuvent correspondre à un nombre premier. En développant de la même manière que précédemment, on montre que $n^2 - 1$ est multiple de 8.
n étant à la fois multiple de 3 et de 8 (premiers entre eux), il est multiple de 24.

retour sommaire

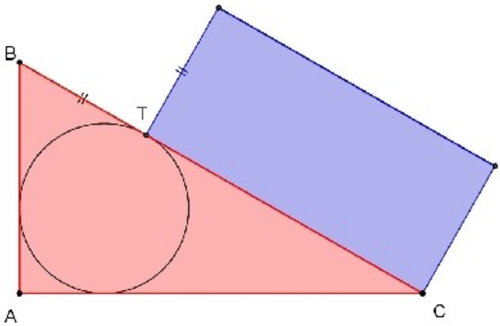
Une solution plus rapide pour les élèves qui ont vu les congruences :
Puisque *n* est premier supérieur ou égal à 5, *n* est congru à 1 ou 2 modulo 3 ; d'où $n^2 - 1$ est congru à 0 modulo 3 (on calcule $n^2 - 1$ mod 3 dans les deux cas).
Par ailleurs, comme *n* est un nombre premier, il ne peut pas être congru à 0, 2, 4 ou 6 modulo 8 (sinon il serait pair). Ainsi, *n* est congru à 1 ou 3 ou 5 ou 7 modulo 8 ; et dans tous ces cas on trouve $n^2 - 1$ congru à 0 modulo 8.

Défi collège n°108

Les représentations graphiques ci-dessus, utilisées par la revue Challenge du 17 au 23 novembre 2011, sont-elles mathématiquement correctes ?

Défi lycée n°108

Le cercle inscrit dans le triangle rectangle rouge ABC est tangent en T à l'hypoténuse. On construit sur [TC] un rectangle bleu dont l'autre côté est égal à BT.
Quelle est la plus grande des deux aires : la rouge ou la bleue ?



Chaque trimestre le Petit Vert vous propose un « DÉFI » destiné à vos élèves de collèges et/ou de lycée. Envoyez toute solution originale de vos élèves, ainsi que toute nouvelle proposition de défi, à Michel RUIBA, 31 rue Auguste Prost, 57000-METZ, michel.ruiba@ecopains.net.