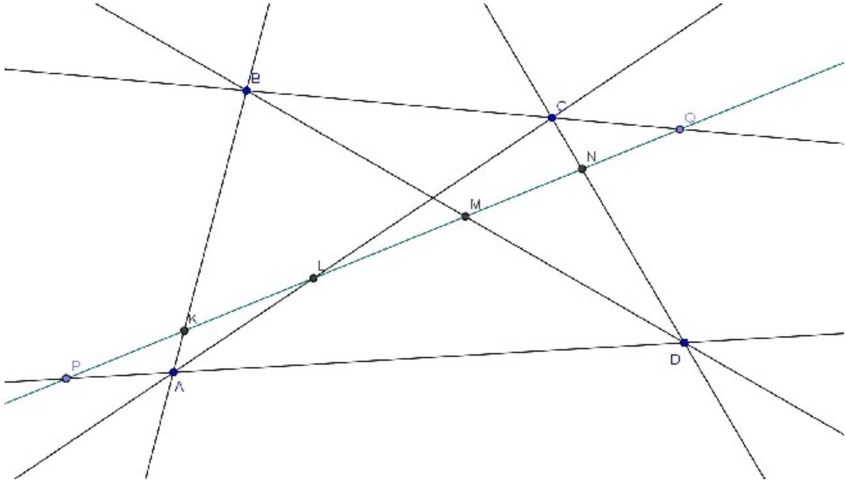
Retour sur le problème n° 106

Rappel du problème : Une droite coupait les côtés latéraux, les diagonales et les prolongements des bases d'un trapèze ABCD en six points, qui déterminaient cinq segments consécutifs PK, KL, LM, MN et NQ. Il s'agissait de démontrer que si les segments extrêmes (le premier et le cinquième) étaient égaux, alors le second et le quatrième l'étaient aussi.

Nous avons reçu un courrier de Jean-Marie DIDRY, nous faisant savoir que les solutions proposées dans le Petit Vert de septembre pour cette question cachaient la nature projective du problème. Il se place dans le cas plus général d'un quadrilatère complet quelconque et permet à la droite (J) de prendre toute position, auquel cas la formulation en terme de segments extrêmes est à revoir : quelques dessins permettent alors de se convaincre que c'est en terme d'égalités de mesures algébriques qu'il faut formuler la question, chacun des points étant clairement défini à partir de la droite (J) et des côtés et des diagonales du trapèze complet ABCD. Voici sa proposition de solution.

Conservons les notations de la figure, le quadrilatère ABCD étant quelconque. Il s'agit d'établir que si $\overline{PK}=\overline{NQ}$, alors $\overline{KL}=\overline{MN}$.

Il suffit d'observer que la projection de centre B sur la droite (AD) suivie de celle de centre L sur la droite (BC) puis de celle de centre D sur la droite (J) transforme la division PLKM en la division QMNL. Il en résulte l'égalité des birapports associés. Compte tenu de l'hypothèse, nous obtenons l'égalité des rapports $\frac{\overline{NM}}{\overline{KL}}$ et $\frac{\overline{MP}}{\overline{LQ}}$, qui valent aussi $\frac{\overline{NP}}{\overline{KQ}}$, c'est à dire -1 en se servant à nouveau de l'hypothèse. D'où le résultat.



Merci à Jean-Marie DIDRY pour cette généralisation.

retour sommaire

Solution du problème n° 107

Quel est le nombre de zéros de factorielle 10^n ?

Voici le nombre de zéros de $(10^n)!$ pour n de 1 à 18 :

n	Nb de zéros de 10^n!
1	2
2	24
3	249
4	2499
5	24999
6	249998
7	2499999
8	24999999
9	249999998
10	2499999997
11	24999999997
12	249999999997
13	2499999999997
14	24999999999998
15	249999999999997
16	2499999999999996
17	24999999999999995
18	249999999999999995

Comme on pouvait s'en douter, il ne suffisait pas de continuer à ajouter des 9 à droite … sinon il n'y aurait pas eu matière à problème.
La solution se trouve dans un article de David Hart, James Marengo, Darren Narayan et David Ross, publié dans « THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL » VOL. 39, n° 2, mars 2008 : « On the number of trailing zeros in n! ».

Merci à Jacques Choné de nous avoir fourni cette référence, et d'en avoir tiré la substantifique moelle :

Soit (a_n) la suite étudiée. Elle est référencée sous le code A173228 (voir https://oeis.org/A173228).
Comme nous l'avions montré dans le Petit Vert n° 55, a_n est le nombre de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de 10^n :

$a_n = \sum_{k=1}^{b(n)} \lfloor \frac{10^n}{5^k} \rfloor$ où $\lfloor \ldots \rfloor$ désigne la partie entière et où $b(n)$ est l'exposant de la plus grande puissance de 5 inférieure ou égale à 10^n.

Puisque $5^k \leqslant 10^n \Leftrightarrow k \leqslant \frac{n \ln(10)}{\ln 5}$, on en déduit :

retour sommaire

$$a_n = \sum_{k=1}^{b(n)} \left\lfloor \frac{10^n}{5^k} \right\rfloor \quad \text{avec} \quad b(n) = \left\lfloor \frac{n \ln(10)}{\ln 5} \right\rfloor .$$

On obtient bien les résultats du tableau ci-dessus.

Jacques Choné nous fait remarquer au passage que la limite de $\frac{a_n}{10^n}$ vaut $\frac{1}{4}$.

On peut aussi généraliser à d'autres bases que 10 : http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL14/Oller/oller3.pdf

<u>Note de dernière minute</u> : nous venons de recevoir une solution de Jean-Marie Didry. Faute de place, nous ne pouvons pas la publier dans ce numéro. Mais nous allons la mettre en ligne dès que possible : rendez vous à la rubrique « problèmes » du site (http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=probleme)

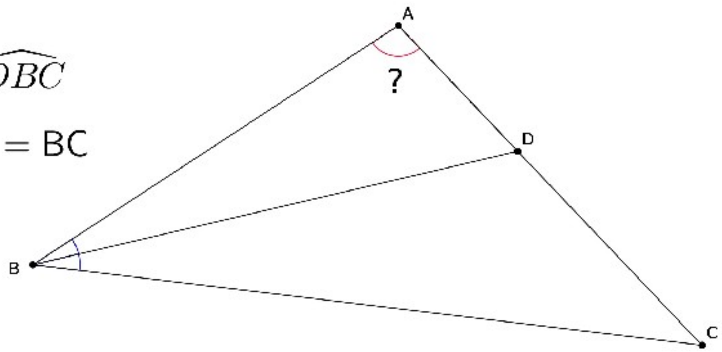
Problème du trimestre n°108

Dans le Monde du mardi existe une excellente chronique de « jeux mathématiques », destinée à un public assez large mais dont les énoncés peuvent mettre douloureusement à l'épreuve les méninges des professeurs de mathématiques eux-mêmes !

Dans un numéro récent, on trouvait le problème suivant :

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$$

$$BD + AD = BC$$



Il s'agissait donc de trouver la valeur de l'angle $\widehat{BAD}$

Ce problème en lui-même fait appel à des formules de géométrie classique (classique mais plus vraiment enseignée aujourd'hui !) mais les grecs auraient-ils posé un tel problème ? Autrement dit, cette figure est-elle constructible à la règle et au compas ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à Loïc TERRIER, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE, de préférence par mail : loic.terrier@free.fr

ı autre