Problème du trimestre n°107

(problème proposé par Jacques Verdier)

Par combien de zéros se termine factorielle 2012 ? Ça pourrait servir pour nos Journées nationales : la réponse est 501.
Dans le Petit Vert n°55, on a déjà traité ce problème du nombre de zéros terminant *n*! C'est d'ailleurs un joli petit problème d'algorithmique à la portée des élèves de terminale.
Voir http://apmeplorraine.free.fr/modules/probleme/PB55.pdf

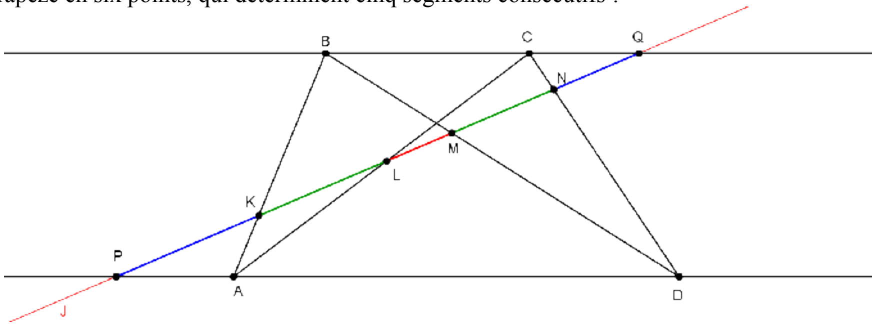
Par curiosité, j'ai alors cherché le nombre de zéros des factorielles des puissances de 10 :
1000! se termine par 249 zéros,
10000! se termine par 2499 zéros,
100000! se termine par 24999 zéros…

Le problème est le suivant : y a-t-il une règle permettant de déterminer, en fonction de n, le nombre de zéros terminant 10^n! ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à Loïc TERRIER, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE, de préférence par mail : loic.terrier@free.fr

Solution du problème n° 106

Une droite (J) coupe les côtés latéraux, les diagonales et les prolongements des bases d'un trapèze en six points, qui déterminent cinq segments consécutifs :



1°) Démontrer que si les segments extrêmes (le premier et le cinquième) sont égaux, alors le second et le quatrième le sont aussi.
2°) A quelle condition, relative aux longueurs des deux bases, les cinq segments peuvent-ils égaux ?

Nous avons reçu seulement deux solutions pour ce problème, l'une de Jacques Verdier, l'autre de Jacques Choné : l'été pluvieux n'aura pas été propice aux recherches mathématiques...

1°)
Solution de J. Verdier ; il n'utilise que des triangles semblables :
Posons $AD = a$, $BC = b$, $PA = x$ et $CQ = y$.
Alors, en observant des paires de triangles semblables, on montre que :

$$\frac{PK}{QK} = \frac{x}{y+b},\ \frac{PN}{NQ} = \frac{x+a}{y},\ \frac{PL}{LQ} = \frac{x}{y} \text{ et } \frac{PM}{MQ} = \frac{x+a}{y+b}.$$

Si $PK = NQ$, alors $PN = KQ$, et le produit des deux premiers rapports vaut 1.

Or ce produit vaut également $\frac{x(x+a)}{y(y+b)}$, qui est égal à $\frac{PL}{LQ} \times \frac{PM}{MQ}$, d'où $\frac{PL}{LQ} \times \frac{PM}{MQ} = 1$.

On en déduit que $\frac{PL}{PQ} = \frac{MQ}{PQ}$, d'où $PL = MQ$ et enfin $KL = MN$. Et la première propriété est démontrée.

Solution de J. Choné ; il se place dans un repère d'origine P, dont l'unité est la hauteur du trapèze :
Soient a, b, c et d les abscisses respectives des points A, B, C et D, et x celle du point Q. Il détermine alors les ordonnées des quatre points K, L, M et N :

$$k = \frac{a}{x-d+a},\quad l = \frac{a}{a-c+a},\quad m = \frac{b}{x-d+b} \quad et \quad n = \frac{b}{x-c+b}.$$

retour sommaire

Pour que l'hypothèse du 1°) de l'énoncé soit satisfaite, il faut et il suffit que x soit une solution (supérieure à c) de l'équation $k = 1 - n$, c-à-d. de $x^2-(c+d)x-ab+cd=0$.

On obtient alors $x=\frac{1}{2}(c+d+\sqrt{(c-d)^2+4ab})$.

Et en utilisant un logiciel de calcul formel, on vérifie que l'on obtient bien $(l\text{-}k)\text{-}(n\text{-}m) = 0$.

2°)

Solution de J. Verdier :

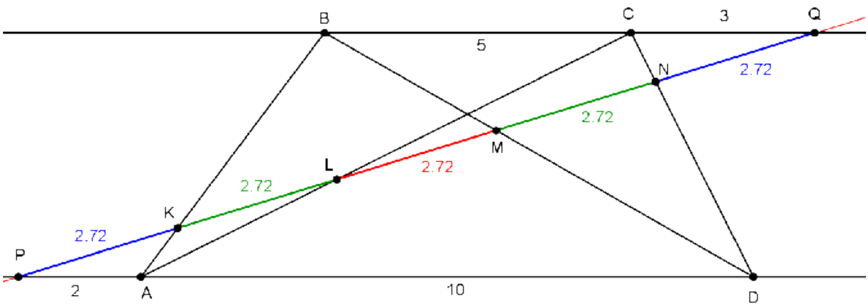
En posant $PK = KL = LM = MN = NQ = u$, et en observant également des paires de triangles semblables (PAK et QBK, etc.), on obtient : $\frac{u}{x}=\frac{4u}{b+y}$, $\frac{u}{y}=\frac{4u}{a+x}$, $\frac{2u}{x}=\frac{3u}{y}$ et $\frac{3u}{x+a}=\frac{2u}{y+b}$. Les trois premières équations donnent $\begin{cases} 4x = b+y \\ 4y = a+x \\ 2y = 3x \end{cases}$

d'où l'on tire successivement $y=\frac{3}{2}x$, $a = 5x$ et $b=\frac{5}{2}x$ (la quatrième équation est une conséquence des trois autres).

Le problème n'est donc possible que si $a = 2b$. Étant donné a quelconque, on prend alors $b=\frac{a}{2}$, $x=\frac{a}{5}$ et $y=\frac{3a}{10}$ pour avoir les cinq segments égaux.

Jacques Choné, quant à lui, montre que les 5 segments sont égaux si et seulement si $k=\frac{1}{5}$ et $m-l=\frac{1}{5}$; et il laisse au logiciel (Maple en l'occurrence) le soin de résoudre ce système pour arriver à la même conclusion : les 5 segments ne peuvent être égaux que si la grande base est le double de la petite.

Ci-dessous, un exemple vérifiant cette condition (figure réalisée avec GeoGebra),



retour sommaire