ÉTUDES MATHÉMATIQUES

Histoire de logarithmes : comment s'est construite une notion difficile à enseigner.

(2ème partie)

Anne Gaydon, Lycée Saint Joseph (Épinal)
Gilles Waehren, Lycée Mangin (Sarrebourg)

Résumé :

Remonter dans l'histoire des logarithmes nous a paru une façon d'appréhender les difficultés des élèves à les assimiler, mais aussi de retourner aux fondements qui ont pu les rendre incontournables. Pour des élèves non scientifiques, notamment dans les sections tertiaires, cette notion vient s'ajouter à celle de racine carrée, souvent mal digérée en raison de ses propriétés pas toujours intuitives. Comme pour la racine carrée, le logarithme d'un nombre se construit (on se référera aux recherches entreprises dans les Petits Verts n° 102 et 103). Cette construction est un moyen de donner vie à ce concept, d'autant que les premiers calculs de logarithmes ont souvent reposé sur des notions simples. On assista, dans un premier temps, à l'éclosion d'une correspondance nécessaire entre suites géométriques et suites arithmétiques (première partie, publiée dans le Petit Vert n° 107), puis au développement de calculs élaborés, afin de déterminer le logarithme de tous les nombres (ci-après).

2. Construction de tables de logarithmes

2.1 Les logarithmes de Neper

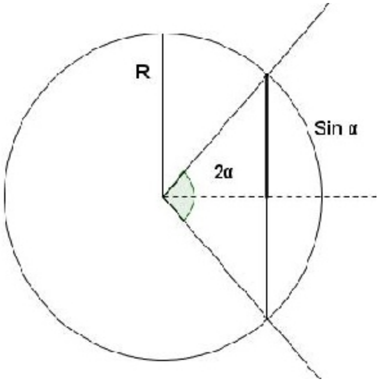
2.1.1. Des sinus longs à calculer

En 1614 John Neper (1550-1617) publie sa *Mirifici logarithmorumcanonis descriptio*, « Description de la merveilleuse table des logarithmes ».

L'objectif de Neper est de faciliter les calculs portant sur des grands nombres. Pour cela, il élabore de nouveaux nombres qu'il appelle logarithmes et remplace les multiplications, divisions et extractions de racines par des additions, soustractions et divisions par des entiers.

Son livre, écrit en latin, contient la définition d'un logarithme et ses propriétés, le mode d'emploi de la table de logarithmes, des exemples de calculs trigonométriques et 90 pages de tables.

Ces tables donnent les angles du premier quadrant, de minute en minute, leurs sinus et le logarithme des sinus.



On note Sin α la longueur de la demi-corde dans un cercle de rayon R.
Ainsi Sin α = R Sin α.
Le sinus de 90° est égal à R et est appelé *sinus total*.

Neper choisit un cercle de rayon R = 10 000 000 ce qui lui permet des sinus avec 7 chiffres significatifs.
Dans ses calculs Neper prendra comme unité 10^7 .

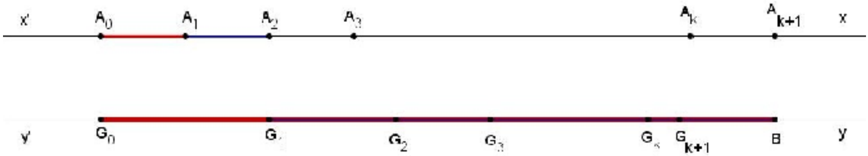
2.1.2. La cinématique au service des mathématiques

Neper établit une correspondance cinématique entre une suite géométrique et une suite arithmétique :

« Une ligne est dite croître uniformément quand un point la décrivant progresse par des intervalles égaux en des moments égaux. »

Un point A décrit le droite $(x'x)$; A se trouve en A_0 à l'instant $t = 0$ et se déplace avec une vitesse v constante :

$$A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_kA_{k+1} = \lambda \qquad \text{et } A_0A_k = k\lambda$$



« Une ligne est dite décroître proportionnellement jusqu'à la plus courte, quand un point la parcourant en des moments égaux détache des segments continuellement de la même raison avec les lignes desquelles ils sont détachés. »

Le point mobile G se déplace sur la droite $(y'y)$, il est en G_0 à l'instant $t = 0$ avec la vitesse v.
À chaque instant, la vitesse de G est proportionnelle à la distance GB restant à parcourir pour atteindre le point B.

$$G_0B = 1 \text{ et } G_1B = \frac{G_1B}{G_0B} = \frac{G_2B}{G_1B} = \ldots = \frac{G_{k+1}B}{G_kB} = q$$

$$\text{donc : } \boxed{G_kB = q^k}$$

« Les mouvements qui sont faits ensemble et dans le même temps sont synchrones. »
Au temps t_k , le point A se trouve en A_k et le point G se trouve en G_k.

En effet, si au temps t_k le point A se trouve en A_k , alors :

$$\frac{A_{0A_k}}{A_{0A_1}} = \frac{t_k}{t_1} = \frac{k\lambda}{\lambda} = k$$

donc : $\boxed{t_k = \lambda t_1}$.

2.1.3 Résolution d'une équation différentielle

La vitesse de G est proportionnelle à la distance GB donc est de la forme C.GB où C est une constante. À l'instant $t = 0$, la vitesse de G est C.G_0B = C ; or, la vitesse de G à l'instant 0 est aussi v, donc : C = v ; ainsi, la vitesse de G à l'instant t est : $\frac{v(GB)}{G_0B} = vGB$.

Soit y l'abscisse du point G sur la droite ($y'y$) munie du repère (G_0, B),

on a alors : GB = 1 – y, et la vitesse de G à l'instant t est : $\frac{dy}{dt} = v(1-y)$

donc y est solution de l'équation différentielle : $Y' = - vY + v$ dont la solution générale est : $Y = Ke^{-vt} + 1$.

Pour $t = 0$, on a : Y = 0, donc : K = - 1, donc : $y = 1 - e^{-vt}$, et donc : $\boxed{GB = e^{-vt}}$.

Quelle est alors la position de G à l'instant t_k ?

A l'instant t_k , $GB = e^{-vt_k} = e^{-vkt_1} = (e^{-vt_1})^k = (G_1B)^k = q^k = G_kB$

Conclusion : à l'instant t_k , le point G est en G_k.

Remarque : la solution de l'équation pourrait être donnée avec une fonction exponentielle de base différente de e ; dans ce cas, la constante serait différente. Dans cet exposé le choix de l'exponentielle de base e est simplement du au fait que cette fonction est introduite en terminale S comme solution de l'équation différentielle $y' = y$.

Remarque : le logarithme de Neper n'est pas vraiment népérien ; en fait, il fait intervenir un log de base $\frac{1}{e}$, mais qui n'est pas tout à fait de base $\frac{1}{e}$ ...

La définition du logarithme :

« donc le logarithme d'un sinus quelconque est un nombre définissant très près une certaine ligne qui croît également pendant que la ligne de tout le sinus décroît proportionnellement jusqu'à ce sinus, un mouvement synchrone existant de part et d'autre et d'égale vitesse au commencement »

En utilisant la notation Nog pour désigner le logarithme calculé par Neper on a :

Nog(G_0B) = A_0A_0 = 0, c'est-à-dire : **Nog(1) = 0** .

(en fait Neper posera $G_0B = 10^7$ et donc Nog $10^7 = 0$: le logarithme du sinus total est 0)

retour sommaire

$\text{Nog}(G_kB) = A_0A_k$, donc : $\text{Nog}(q^k) = kA_0A_1$
or : $A_0A_1 = \text{Nog}(G_1B) = \text{Nog}(q)$

donc : $\mathbf{Nog}(q^k) = k\,\mathbf{Nog}(q)$

2.2 La construction de la table des logarithmes décimaux par Briggs

2.2.1. Une nouvelle table

Henry Briggs (1561-1630) est professeur de mathématiques à Londres.
Après la publication de la table de logarithme de Neper, Briggs lui rend visite en Écosse pendant l'été 1615, puis en 1616. Ils tombent d'accord sur la nécessité d'envisager une nouvelle table de logarithmes : les logarithmes calculés par Neper pouvaient être améliorés.

Les nouveaux logarithmes définis par Briggs et Neper vérifient log 1 = 0 et log 10 =1 (il s'agit de notre logarithme décimal).

Cela revient à mettre en correspondance une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q inconnue et une suite arithmétique dont le premier terme est 0. On fait correspondre à 10 (terme de la suite géométrique) le terme 1 de la suite arithmétique. (En fait on prendra 100 000 000 000 000 pour avoir des log avec une précision de 14 chiffres après la virgule).

suite géométrique	suite arithmétique (logarithme)
1	0
10	100 000 000 000 000

Vocabulaire : Briggs parle de suite de nombres continuellement proportionnaux pour désigner des nombres en progression géométrique.
Il désigne par indice d'un nombre dans la suite, la puissance d'un nombre donné ou son logarithme.

Briggs propose ainsi deux méthodes pour calculer les logarithmes des nombres entiers.

retour sommaire

2.2.2. Première méthode : très astucieuse

a) Considération préalable

Supposons que l'on mette en correspondance deux suites, l'une géométrique l'autre arithmétique, de telle façon qu'au terme 1 de la première suite corresponde 0 et au terme 32 corresponde 5. On veut déterminer le terme correspondant à 8.
Briggs propose la technique suivante :

suite géométrique	indice	suite géométrique	indice	suite géométrique	indice
1	0	1	0	1	0
2		8	1	32	1
4		64	2	1024	2
8	?	512	3	32768	3
16		4096	4		
32	5	32768	5		

Pour trouver l'indice correspondant à 8, on construit une suite de raison 8, le terme d'indice 5 de cette suite est 32768.

On construit alors la suite géométrique de raison 32, dans cette suite le terme 32768 a pour indice 3. On en déduit que 8 a pour indice 3 dans le premier tableau.
Briggs ne démontre pas le résultat utilisé mais il est facile de le justifier avec les notations actuelles. En effet :

notons q la raison, inconnue, de la suite géométrique,
alors : $32 = q^5$, et : $8 = q^n$
où n désigne l'indice de 8, inconnue que l'on cherche ;
par suite : $8^5 = (q^n)^5 = (q^5)^n = 32^n$;
donc trouver l'indice de 8 revient à trouver l'exposant n tel que : $8^5 = 32^n$.
La première méthode de Briggs est basée sur cette remarque.

b) Détermination du logarithme décimal de 2

On considère donc deux suites : une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q (inconnue) et la suite arithmétique des indices.

suite géométrique	indice
1	0
….	
2	??
….	
10	100 000 000 000 000 = 10^{14}

retour sommaire

Briggs prend 10^{14} comme indice pour 10 de façon à avoir une précision de 14 décimales, ainsi : $2^{10^{14}} = (q^n)^{10^{14}} = (q^{10^{14}})^n = 10^n$.

Trouver le log décimal de 2 revient donc à déterminer la puissance de 10 qui est égale à $2^{10^{14}}$. Évidemment, on ne trouvera pas d'entier n qui convienne puisqu'aucune puissance de 2 n'est égale à une puissance de 10, mais on va chercher à encadrer $2^{10^{14}}$ par deux puissances de 10 d'exposants entiers consécutifs : $10^{n-1} < 2^{10^{14}} < 10^n$.

Le problème est maintenant de déterminer n. Un nombre entier compris entre 10^{n-1} et 10^n comporte n chiffres : il suffit donc de déterminer le nombre de chiffres de $2^{10^{14}}$ pour déterminer log 2 : très astucieux ! On est maintenant confronté à un autre problème : comment compter le nombre de chiffres d'un grand nombre comme $2^{10^{14}}$?...

c) Table de calcul par quatraines

suite géométrique	indice	nombre de chiffres du terme de la suite	
1	0		
2	1		
4	2	1	1ère quatraine
16	4	2	
256	8	3	
1024	10	4	
$1024^2 = 1048576$	20	7	2ème quatraine
1024^4	40	13	
1024^8	80	25	
1024^{10}	100	31	

On prend comme premiers termes de la suite géométrique (de raison 2), 1 et 2 dont on cherche le log : 1 a pour indice 0 et 2 a pour indice 1.
On construit ensuite la première quatraine :

- le premier terme est obtenu en élevant 2 au carré ;
- le deuxième en élevant le premier au carré ;
- le troisième en élevant le deuxième au carré ;
- le quatrième multipliant le premier par le troisième.

Le quatrième terme de la quatraine a donc pour indice 10 et est égal à 2^{10}.
On recommence de même pour obtenir la deuxième quatraine dont le quatrième terme aura pour indice 100 et sera égal à 2^{100}.
Le quatrième terme de la quatorzième quatraine sera donc égal à $2^{10^{14}}$.
Il reste à compter le nombre de chiffres à chaque étape.
Lorsqu'on multiplie entre eux deux nombres ayant respectivement *n* et *p* chiffres le produit aura *n* + *p* ou *n* + *p* – 1 chiffres.

d) Un problème de précision

Comment déterminer précisément le nombre de chiffres ? Pour avoir une précision de 14 décimales, combien de chiffres doit-on garder lors du calcul ?
Exemple du calcul de log 7 (avec 5 chiffres après la virgule) :

suite géométrique	indice	chiffres	
1	0		
7	1		
49	2	2	1ère quatraine
2401	4	4	
5 764 801	8	7	
282 475 249	10	9	
$282\,475\,249^2 = 7{,}979226630.10^6$	20	17	2ème quatraine
$282\,475\,249^4 = 6{,}366805761.10^{33}$	40	34	
$282\,475\,249^8 = 4{,}053621560.10^{67}$	80	68	
$282\,475\,249^{10} = 3{,}234476510.10^{84}$	100	85	
$(3{,}234476510.10^{84})^2 = 1{,}046183829.10^{169}$	200	170	3ème quatraine
$(3{,}234476510.10^{84})^4 = 1{,}094500605.10^{338}$	400	339	
$(3{,}234476510.10^{84})^8 = 1{,}197931574.10^{676}$	800	677	
$(3{,}234476510.10^{84})^{10} = 1{,}253256641.10^{845}$	1000	846	
$(1{,}253256641.10^{845})^2 = 1{,}570652208.10^{1690}$	2000	1691	4ème quatraine
$(1{,}253256641.10^{845})^4 = 2{,}466948358.10^{3380}$	4000	3381	
$(1{,}253256641.10^{845})^8 = 6{,}085834203.10^{6760}$	8000	6761	
$(1{,}253256641.10^{845})^{10} = 9{,}558728929.10^{8450}$	10000	8451	
$(9{,}558728929.10^{8450})^2 = 9{,}136929874.10^{16901}$	20000	16902	5ème quatraine
$(9{,}558728929.10^{8450})^4 = 8{,}348348752.10^{33803}$	40000	33804	
$(9{,}558728929.10^{8450})^8 = 6{,}969492688.10^{67607}$	80000	67608	
$(9{,}558728929.10^{8450})^{10} = 6{,}367976595.10^{84509}$	100000	84510	

On a donc obtenu que : $10^{84509} < 7^{10^5} < 10^{84510}$ et donc : $0{,}84509 < \log 7 < 0{,}84510$.

2.2.3. Deuxième méthode : extraction de racine carrée

Briggs et ses collègues dressent un tableau des racines carrées successives de 10 (travail quelque peu fastidieux !) jusqu'à la 54ème. Ce sont les nombres continuellement moyens : chaque terme est obtenu en calculant la moyenne géométrique du nombre précédent avec 1.

a) La règle des proportions

« Je cherche donc des nombres continuellement moyens entre Dix et Un dont le premier sera $\sqrt{10}$ à savoir $3\,\frac{1622776606837633199889354}{1000000000000000000000000}$ qui est le moyen proportionnel entre 10 et 1.

Et après, je cherche encore le côté du précédent [la racine carrée] $\sqrt{\sqrt{10}}$ qui est $1\,\frac{77827941003892280119730413}{100000000000000000000000000}$.

Puis, derechef, encore le côté du précédent $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$: $1\,\frac{33352143216332402566538931}{100000000000000000000000000}$;

et ainsi vais-je toujours continuant le même ordre d'opérations, jusqu'à tant que j'en aie une colonne de cinquante cinq nombres, le Dix y enclos. Lesquels sont ici marqués par D et leurs sont adjoints à côté à chacun leurs Logarithmes rationnels marqués par E.

Le moindre des continuellement Moyens est :
$1\,\frac{000000000000000127819149320032344165}{1000000000000000000000000000000000000}$ dont le Logarithme se trouve en mi-partissant 0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815,83 car le Logarithme du côté est la moitié de celui du carré par ce que le carré est produit de la multiplication du côté en soi-même et partant chacun de ces Logarithmes sera double de son plus proche moindre.
Et d'autant que les caractères significatifs, adjoints à l'Unité après quinze zéros sont la moitié de ceux qui vont immédiatement devant ; tant sont nombres continuellement moyens que sont les Logarithmes : il semble que les Logarithmes retiennent la même proportion en décroissant que les nombres auxquels ils sont adjoints. Et partant si quelques nombres sont diminués si avant, qu'après l'unité s'y ensuivent immédiatement quinze zéros, nous donnerons les vrais Logarithmes, ou approchant fort près, par la règle des proportions. »

b) Justification des approximations

Cette règle peut s'écrire : $\log(1 + x) = Cx$, pour $x < 10^{-15}$.
La constante C se calcule à l'aide de la relation :
$\frac{\log(1+x)}{\log(1+y)}=\frac{x}{y}$, ce qui équivaut à : $\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{\log(1+y)}{y}=C$.

La dernière ligne du tableau permet d'écrire :
Log (1,0000 00000 00000 01278 19149 32003 235)
= 0,00000 00000 00000 05551 11512 31257 82702 11815
On a donc :
$C = \frac{0,0000000000000000555111512312578270211815}{0,000000000000000127819149320032344165} \approx 0,434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 804$

soit : $\boxed{C \approx \frac{1}{\ln 10}}$.

retour sommaire

On peut montrer que : $|\ln(1 + x) - x| < x^2 < 10^{-30}$, pour $x < 10^{-15}$.

Donc : $\left|\dfrac{\ln(1+x)}{\ln 10} - \dfrac{x}{\ln 10}\right| < \dfrac{x^2}{\ln 10} < \dfrac{10^{-30}}{\ln 10} < 10^{-30}$,

donc, en remplaçant, log(1 + x) par $\dfrac{x}{\ln 10}$ pour $x < 10^{-15}$, Briggs fait une erreur inférieure à 10^{-30}.

c) Conclusion

Pour calculer le logarithme d'un nombre n :

- on calcule les racines carrées successives de ce nombre jusqu'à que ce que l'on obtienne un nombre inférieur à $1 + 10^{-15}$;
- on calcule le logarithme du nombre trouvé à l'aide de la règle des proportions ;
- on remonte les calculs en multipliant par 2 jusqu'au logarithme du nombre n.

En pratique, Briggs utilise quelques astuces pour simplifier les calculs.

Par exemple pour calculer le logarithme de 2, il utilise le fait que : $2^{10} = 1024$, donc :

$$10 \log 2 = \log 1024 = \log(1000 \times 1{,}024) = 3 + \log 1{,}024.$$

Briggs calcule alors le logarithme de 1,024 (qui est quand même plus proche de 1 que 2 !) puis il en déduit le logarithme de 2.

Pour calculer le logarithme de 5, Briggs utilise :

$$\log 5 = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2.$$

Pour calculer le logarithme de 6, il remarque que : $6^9 = 10077696$, et il calcule donc le logarithme de 1,0077696.

Le logarithme de 3 se déduit de log 2 et log 6, etc.

Briggs propose enfin une méthode pour extraire les racines carrées, plus rapide que la méthode couramment utilisée : la méthode des différences.

3. Bibliographie

- Simone TROMPLER : *L'histoire des logarithmes* - Les cahiers du CeDoP
- IREM - *Histoire des mathématiques* : Histoires de logarithmes - ellipses
- Luca PACIOLI : *Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita* - (Venise 1494)
- Jean TRENCHANT : *L'arithmétique départie en trois livres* - Paris 1558
- Nicole VOGEL : *La construction des logarithmes de Néper* - L'Ouvert n°55
- John NEPER : *Mirifici logarithmorumcanonis descriptio* - 1614
- John NEPER & Henry BRIGGS : *Logarithmica* - Londres 1624

retour sommaire