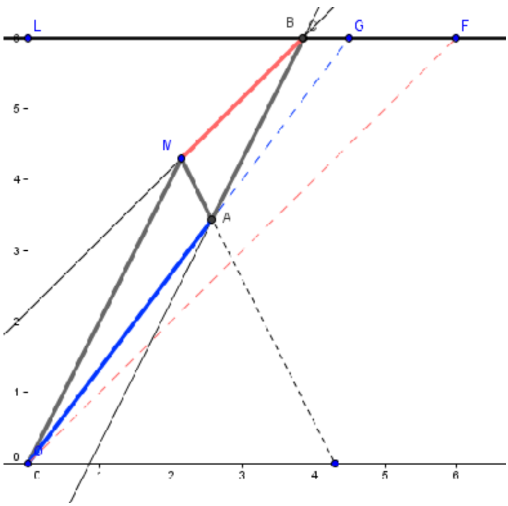
Solution du problème n° 103

Merci à Pol le Gall et à Jacques Verdier pour leurs solutions, essentiellement géométriques, à Yann Payoux du lointain de son île et à Pascal Richard, toujours prêt à servir de cobaye pour de nouveaux problèmes (pas toujours résolus quand je les lui pose !). Voici la solution de Pol pour la première question.

L’énoncé ne dit pas si l’âne est intelligent et s’il est capable d’autonomie ou s’il faut toujours qu’un des enfants soit avec lui ; supposons pour l’instant qu'il le soit. L’âne seul mettrait 30 minutes, la fille seule 60 minutes et le garçon seul 45 minutes.
C’est la fille qui va le moins vite, l’âne va donc surtout la transporter. S’il la transporte tout le temps, le garçon mettra 45 minutes. Mais l’âne et la fille seront arrivés depuis 15 minutes. On aura donc perdu du « temps d’âne ». Pour optimiser l’utilisation de l’âne il faudrait que celui-ci transporte la fille pendant un certain temps puis la laisse finir le chemin et aille chercher le garçon pour lui permettre d’accélérer sa fin de parcours.

Illustrons la situation par une représentation graphique : en abscisse le temps en dizaines de minutes, en ordonnées le parcours en km, le garçon piéton en bleu, la fille piétonne en rose et l’âne, bien sûr, en gris. [OM] représente le trajet de l’âne portant la fille, [MC] le trajet de la fille toute seule, [MA] le trajet de l’âne seul retournant chercher le garçon, [AB] le trajet de l’âne portant le garçon. [OG] et [OF] représentent les parcours du garçon et de la fille s’ils étaient piétons.



Pour optimiser l’utilisation de l’âne, il faut éviter que l’un des enfants attende l’autre à l’arrivée, il faut donc que les points B et C soient confondus.

Soit t l’abscisse du point M. Ce point a pour ordonnée $2t$.
La droite (MC) a pour équation : $y=x+t$, donc le point C a pour abscisse $6 - t$.
La droite (MA) a pour équation : $y= - 2x+4t$

La droite (OA) a pour équation : $y=(4/3)x$
Donc le point A a pour coordonnées $(1{,}2t\ ;\ 1{,}6t)$.
La droite (AB) a pour équation : $y=2x - 0{,}8t$ donc le point B a pour abscisse $0{,}4t + 3$.
B = C si et seulement si $t = 15/7$. L'abscisse de B vaut alors 27/7.
Donc, l'unité choisie étant la dizaine de minutes, la promenade durera 270/7 minutes soit environ 38 minutes et demi.

Remarque : Si l'âne est bête, il ne faut plus compter sur lui pour aller tout seul rechercher un enfant, cependant la fille peut attacher l'âne à un arbre. Le garçon montera sur l'âne lorsqu'il l'atteindra. Le principe est le même que plus haut (arrivées simultanées), la promenade dure 40 minutes.

Deuxième approche pour la résolution de ce problème : on suppose de nouveau l'âne assez intelligent pour faire le chemin seul à l'envers. On note x la distance que parcourt l'âne avec la fille, et on cherche à égaler le temps de parcours de la fille et du garçon. Pour la fille, on trouve un temps de :
$t_1=\frac{x}{12}+\frac{6-x}{6}$, et pour le garçon, c'est un peu plus compliqué : pendant que l'âne (avec la fille sur son dos) parcourt x km, le garçon en a parcouru $\frac{2x}{3}$.
L'âne et le garçon sont donc distants de $\frac{x}{3}$ km, qu'ils mettent $\frac{x}{60}$ h à parcourir (leurs vitesses s'additionnent). Le garçon a encore parcouru $\frac{8x}{60}$ km, il en est à $\frac{4x}{5}$ km. Il parcourt les $6-\frac{4x}{5}$ km restant sur l'âne, d'où un temps total de $t_2=\frac{\frac{4x}{5}}{8}+\frac{6-\frac{4x}{5}}{12}=\frac{x}{10}+\frac{1}{2}-\frac{x}{15}=\frac{1}{2}+\frac{x}{30}$ (ouf).

$$t_1=t_2 \Leftrightarrow 1-\frac{x}{12}=\frac{1}{2}+\frac{x}{30} \Leftrightarrow x=\frac{30}{7} \quad \text{Et} \quad t_1=t_2=\frac{9}{14}.$$

Pas sûr que cette approche soit plus claire, mais on reste sur du calcul élémentaire, on peut s'amuser à le proposer à des élèves de seconde (je l'ai fait, si si).

Troisième approche qui a le mérite d'être simple et de bien se généraliser.
On note t_A, t_B les temps respectifs de la fille et du garçon sur l'âne, et t_0 le temps où l'âne est seul (en sens inverse, donc).

On a le système : $\begin{cases} 12t_A+6(t_B+t_0)= & 6 \\ 12t_B+8(t_A+t_0)= & 6 \\ 12(t_A+t_B-t_0)= & 6 \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} t_A= & 5/14 \\ t_B= & 3/14 \\ t_0= & 1/14 \end{cases}$ soit un temps total de $\frac{9}{14}$.

La deuxième question (celle où il y a trois enfants, Albert, Bettie et Célestin) se traite de la même façon.

On obtient : $\begin{cases} 9t_A+5(t_B+t_C+t_0)= & 7 \\ 11t_B+6(t_A+t_C+t_0)= & 7 \\ 10t_C+7(t_A+t_B+t_0)= & 7 \\ 9t_A+11t_B+10t_C-12t_0= & 7 \end{cases}$ et on trouve un temps minimal de $t=\frac{6797}{7031}$ heures, soit environ 58 minutes !

Bravo à Jacques Verdier qui avait trouvé ce résultat par la méthode géométrique, et un grand merci à Pascal Richard qui m'a montré cette approche tandis que je peinais avec mes *x*...

N.B. Une solution plus complète est disponible sur le site.

Problème du trimestre n°104

(proposé par Jacques Verdier)

« Je suis un nombre entier. Mon carré se termine par trois fois un même chiffre (différent de zéro).
Qui suis-je? »

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à Loïc TERRIER, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE, de préférence par mail.

retour sommaire