

Solution du problème n° 102

proposé par Jacques CHONÉ

- Montrer que l'application f de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a$ est bijective. Exprimer, pour $x \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(x)$ (et en particulier $f^{-1}(2010)$).
- Donner de même une application bijective f_3 de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ en précisant $f_3^{-1}(x)$ (et en particulier $f_3^{-1}(2010)$).
- Généraliser encore.

Solution de l'auteur.

1. Numérotons les éléments de $\mathbb{N}^2$ suivant leur rang sur le « diagonales nord-est vers sud-ouest » (✓) successives comme dans le tableau ci-contre.

Soit $g(a,b)$ le numéro de (a,b) : on a par exemple $g(3,1) = 13$. On a, pour tout $b \in \mathbb{N}^2$

$$: \quad g(0,b) = 1 + 2 + \dots + b = \frac{b(b+1)}{2} = \binom{b+1}{2} = t_b$$

(b -ième nombre triangulaire).

Or, pour $a \in \llbracket 1, b \rrbracket$, $g(a,b) = g(a-1, b+1) + 1$

d'où, par récurrence finie, $g(a,b) = g(0, b+a) + a = f(a,b)$. Conclusion : $g = f$ et f est donc bijective.

Notons que $a+b$ est le numéro (à partir de 0) de la diagonale contenant (a,b) .

Soit $x \in \mathbb{N}$ et $(a,b) = f^{-1}(x)$ c'est-à-dire la position de x dans le tableau. La valeur

$n = a + b$ est le plus grand nombre entier tel que $\frac{n(n+1)}{2} \leq x$, c'est-à-dire la partie

entière de la solution de l'équation d'inconnue X : $X^2 + X - 2x = 0$; donc

$$n = a + b = \langle x \rangle \text{ en notant } \langle x \rangle = \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{1 + 8x}}{2} \right\rfloor.$$

On en déduit $a = x - \binom{\langle x \rangle + 1}{2}$ et $b = \langle x \rangle - a = \langle x \rangle + \binom{\langle x \rangle + 1}{2} - x = \frac{\langle x \rangle(\langle x \rangle + 3)}{2} - x$;

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = \left(x - \binom{\langle x \rangle + 1}{2}, \frac{\langle x \rangle(\langle x \rangle + 3)}{2} - x \right).$$

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	0	1	3	6	1 0	1 5
1	2	4	7	1 1	1 6	
2	5	8	1 2	1 7		
3	9	1 3	1 8			
4	1	1				
5	4 2 0	9				

Par exemple $\langle 2010 \rangle = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{16081}}{2} \right\rfloor = 62$; $\binom{63}{2} = 1953$; $\frac{63 \cdot 65}{2} = 2015$:

$f^{-1}(2010) = (1010 - 1953, 2015 - 2010)$; Vérification : $f(37, 5) = \binom{63}{2} + 57 = 2010$.

2. On notera dorénavant f_2 l'application étudiée au 1. On numérote maintenant les éléments (a, b, c) de $\mathbb{N}^3$ suivant leur rang dans les plans successifs $a + b + c = n$, $n \in \mathbb{N}$, puis dans chacun de ces plans de la même façon qu'au §1 : voir figure ci-contre. Soit $f_3(a, b, c)$ le rang de (a, b, c) . le nombre d'éléments de (a, b, c) tels que $a + b + c < n$

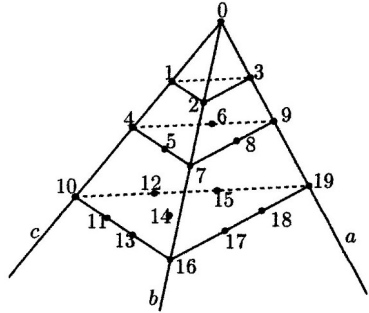
est $f_3(0, 0, n) = \sum_{k=1}^n t_k = \sum_{k=1}^n \binom{k+1}{2} = \binom{n+2}{3}$,

n -ième nombre tétraédrique.

On en déduit que $f_3(a, b, c) = f_2(0, 0, a + b + c) + f_2(a, b)$ est une

application bijective de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$ et peut être définie par :

$$f_3(a, b, c) = \binom{a + b + c + 2}{3} + \binom{a + b + 1}{2} + \binom{a}{1}.$$



Soit $x \in \mathbb{N}$. Pour déterminer $f_3^{-1}(x) = (a, b, c)$, comme au §1, on détermine d'abord $n = a + b + c$ comme la partie entière de la solution réelle de l'équation en X : $(X+2)(X+1)X = 6x$; on obtient avec la formule classique $a + b + c = n$ avec

$$n = \left\lfloor \frac{1}{3} \sqrt[3]{91x + 3\sqrt{-3 + 729x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{91x + 3\sqrt{-3 + 729x^2}}} - 1 \right\rfloor.$$

On détermine ensuite $m = a + b$ comme la partie entière de la solution positive de l'équation en X : $X(X+1) = 2 \left\lfloor x - \binom{n+2}{2} \right\rfloor$, etc.

Exemple : déterminons $f_3^{-1}(2010) = (a, b, c)$. La solution réelle de $(X+2)(X+1)X = 6 \cdot 2010$ est 21,94... donc $a + b + c = 21$; la solution réelle positive de l'équation $X(X+1) = 2 \left\lfloor 2010 - \binom{23}{3} \right\rfloor$ est 21,36... ; donc $a + b = 21$; et on a

$a = 2010 - \binom{23}{3} - \binom{22}{2} = 8$. On en déduit que $b = 21 - 8 = 13$ et $c = 21 - 13 - 8 = 0$;

donc $f_3^{-1}(2010) = (8, 13, 0)$.

On vérifie que $f_3(8,13,0) = \binom{13}{3} + \binom{22}{2} + \binom{8}{1} = 2010$.

3. On généralise en notant que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$f_n(a_1, \dots, a_n) = \binom{a_1 + \dots + a_n + n - 1}{n} + \binom{a_1 + \dots + a_{n-1} + n - 2}{n-1} + \dots + \binom{a_1}{1}$$

$$= \sum_{k=1}^n \binom{k-1 + \sum_{i=1}^k a_i}{k} \quad \text{est bijective}$$

Par la même méthode que ci-dessus, on trouve à l'aide d'un logiciel de calcul (voir ci-dessous en Maple), par exemple que $f_4^{-1}(2010) = (4, 2, 3, 4)$

```
> floor(evalf(solve(x*(x+1)*(x+2)*(x+3)=24*2010))[2]);
13
> floor(evalf(solve(x*(x+1)*(x+2)=6*(2010-binomial(16,4)))[1]));
9
> floor(evalf(solve(x*(x+1)=2*(2010-binomial(16,4)-binomial(11,3)))[1]));
6
> 2010-binomial(16,4)-binomial(11,3)-binomial(7,2);
4
> solve({a+b+c+d=13,a+b+c=9,a+b=6,a=4});
{a = 4, d = 4, c = 3, b = 2}
> f(4):=(a,b,c,d)->binomial(a+b+c+d+3,4)+binomial(a+b+c+2,3)+binomial(a+b+1,2)+binomial(a,1);
> f(4)(4,2,3,4);
2010
```

Problème du trimestre n°103

(proposé par Loïc Terrier)

Il y a quelque temps, j'ai reçu un diaporama par mail, qui contenait toutes sortes de questions plus ou moins mathématiques, dont celle-ci :

Deux enfants et un âne font une promenade. Le soir tombe, ils décident de rentrer chez eux. C'est à 6 km. La fille marche à 6 km/h, le garçon à 8 km/h et l'âne à 12 km/h. L'âne peut porter un enfant. Quel est le temps minimum nécessaire pour qu'ils rentrent chez eux ?

- La réponse donnée en solution dans le diaporama était 45 minutes... Pouvez-vous proposer mieux, en prêtant à l'âne une certaine intelligence ?
- La variante suivante peut être très difficile, ou pas, selon la méthode utilisée !
Cette fois, il y a Albert, Bettie et Celestin, toujours avec leur âne.
Albert va à 5 km/h seul, 9 km/h sur l'âne. Bettie va à 6 km/h seule, 11 km/h sur l'âne. Celestin va à 7 km/h seul, 10 km/h sur l'âne.
L'âne seul va à 12 km/h. Ils ont 7 km à parcourir...

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à Loïc TERRIER, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE, de préférence [par mail](#).