

RACINE CARRÉE DE 2 À TRAVERS LES ÂGES : DES BABYLONIENS À EULER (2e partie)

*Anne Gaydon, Lycée Saint-Joseph, Épinal
Gilles Waehren, Lycée Mangin, Sarrebourg*

Suite de l'article paru dans le Petit Vert n°102 de juin

Le texte d'Euler donnant le calcul approchée d'une racine carrée

Pré requis...

« Le premier moyen dont nous parlerons, suppose qu'on ait déjà déterminé assez exactement la valeur d'une racine(*) ; qu'on sache, par exemple, qu'une telle valeur surpasse 4, et qu'elle est plus petite que 5.

Dans ce cas, si l'on suppose cette valeur $= 4 + p$, on est sûr que p exprime une fraction. Or si p est une fraction, et par conséquent moindre que l'unité, le carré de p , son cube, et en général toutes les puissances plus hautes de p , seront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, et cela fait que, puisqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul. »

Description de l'itération

« Quand on aura déterminé à peu près la fraction p , on connaîtra déjà plus exactement la racine $4 + p$;

on partira de là pour déterminer une valeur encore plus exacte,

et on continuera de la même manière, jusqu'à ce qu'on ait approché de la vérité autant qu'on le souhaitait. »

Exemple pour la recherche de la racine carrée de 20.

« Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $x^2 = 20$

On voit ici que x est plus grand que 4 et plus petit que 5 ; en conséquence de cela, on fera $x = 4 + p$ et on aura : $x^2 = 16 + 8p + p^2 = 20$

mais comme p^2 est très petit, on négligera ce terme pour avoir finalement l'équation : $16 + 8p = 20$

ce qui donne : $p = \frac{1}{2}$ et : $x = 4 + \frac{1}{2}$

ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. »

(Remarque qui précise l'état d'esprit de l'auteur)

Et on recommence...

« Si donc on suppose à présent $x = \frac{9}{2} + p$, on est sûr que p signifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, et qu'on pourra négliger p^2 à bien plus forte raison ... [...]

d'où : $x = 4 + \frac{4473}{11592}$, valeur qui approche si fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle. »

(Avis pour le moins assez tranché, mais n'est pas Euler qui veut).

En quatre étapes, Euler approche $\sqrt{20} \approx 4,472135955$ par $x = 4 + \frac{5473}{11592}$ (après correctif) soit environ 4,472135956, en négligeant p^2 à chaque étape...

En appliquant la méthode d'Euler à $\sqrt{2}$, on obtient :

étape	équation	p	x	valeur approchée
1			$1 + p$	1
2	$1 + 2p \approx 2$	$\frac{1}{2}$	$1 + \frac{1}{2} + p$	1,5
3	$2 + \frac{1}{4} + 3p = 2$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{12} + p$	1,417
4	$\frac{289}{144} + \frac{17}{6}p = 2$	$-\frac{1}{408}$	$\frac{17}{12} - \frac{1}{408} = \frac{577}{408}$	1,414216

Pour éléments de comparaison, on donnera :

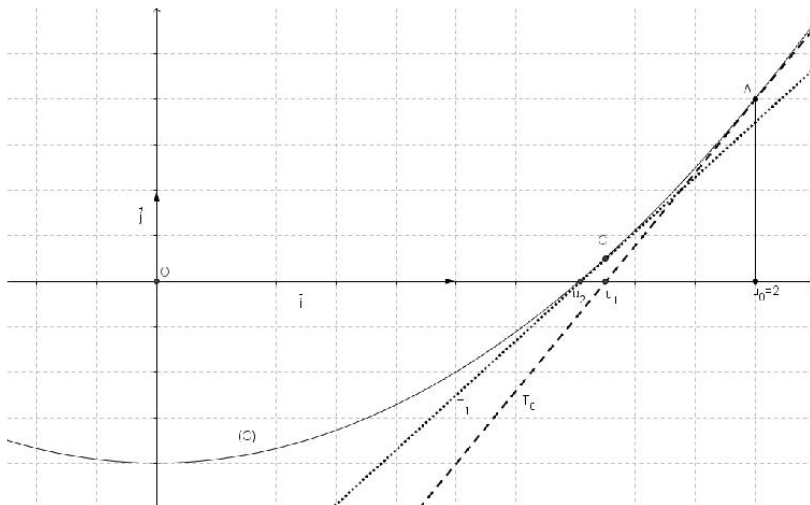
$\sqrt{2} \approx 1,414214$ et, sur la tablette YBC 7289, $\frac{30547}{21600} \approx 1,414213$. La méthode d'Euler nous offre, elle aussi une convergence quadratique.

Les tangentes de Newton

Cette méthode consiste à approcher les zéros d'une fonction en utilisant des tangentes successives et leurs points d'intersection avec l'axe des abscisses. La racine carrée de 2 est racine de la fonction d'expression : $f(x) = x^2 - 2$. Pour déterminer ce nombre, on trace la courbe représentative de f :

Les calculs

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est : $y = 2a(x - a) + a^2 - 2$ soit : $y = 2ax - a^2 - 2$.



La droite coupe l'axe des abscisses en $\frac{a^2 + 2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$ (pour $a \neq 0$) qui est l'abscisse du point de tangence suivant. On construit donc la suite (u_n) telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} \end{cases}$$

On définit ainsi une suite qui converge vers la racine carrée de 2.

n	u_n
1	2.000000000000
2	1.500000000000
3	1.416666666700
4	1.414215686275
5	1.414213562375
6	1.414213562373
7	1.414213562373
8	1.414213562373

Une fois encore, la convergence est rapide.

Comparaison des méthodes

Les quatre méthodes présentées précédemment proposent un calcul approché de $\sqrt{2}$ d'un point de vue à chaque fois différent : géométrique, algébrique, algébrique-analytique et analytique. Le lecteur aura observé, malgré tout, certaines similitudes, notamment dans les calculs intermédiaires ; nous allons les mettre en évidence.

Pour les rectangles successifs :

Si l'on considère la suite (L_n) des longueurs et (l_n) celle des largeurs, on obtient les

$$\text{récurrences : } \begin{cases} L_1 = 2 \\ l_1 = 1 \\ L_{n+1} = \frac{L_n + l_n}{2} \\ l_{n+1} = \frac{2}{L_{n+1}} \end{cases} \quad \text{soit : } \begin{cases} L_1 = 1 \\ L_{n+1} = \frac{1}{2\left(L_n + \frac{2}{L_n}\right)} \end{cases}$$

plus connues sous le nom d'algorithme de Héron.

La méthode des fractions continuées donne une suite (u_n) de réduites qui vérifie :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

Les termes consécutifs sont alternativement supérieurs et inférieurs à $\sqrt{2}$ d'où la convergence assez lente de cette suite. Les termes de la sous-suite (u_{2n+1}) sont égaux à ceux de la suite (L_n) .

Comme nous l'avons déjà constaté, la méthode de Newton suit, elle aussi, la même récurrence que l'algorithme de Héron.

De façon plus inattendue, c'est également le cas de l'algorithme d'Euler. En effet :

- à chaque étape, on résout : $(x_n + p)^2 = 2$
- en négligeant p^2 , on trouve : $p = \frac{(2 - x_n)^2}{2x_n}$
- d'où : $x_{n+1} = x_n + p \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$
- soit : $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \right)$ qui a un petit air de « déjà-vu »...

Tant et si bien que sur les quatre méthodes explorées, trois sont associées à la même récurrence. On se gardera cependant de les confondre, tant leur approche est différente. Chacune d'entre elles permet toutefois d'approcher toutes les racines carrées d'entiers voulues de manière assez simple et efficace.

Exploitation en classe

La méthode des Babyloniens a été expérimentée dans une classe de Seconde relativement faible au cours de deux séances de modules. Une première pour rappeler le rôle de $\sqrt{2}$ dans le carré, présenter la tablette YBC 7289, construire les rectangles et commencer les calculs ; la deuxième a permis de traiter la quatrième étape, de chercher les formules sur tableur et de discuter des résultats obtenus.

La méthode des fractions continuées a fait l'objet d'une activité au sein d'un club de maths, en utilisant la calculatrice et le tableur.

La méthode de Newton reste un sujet toujours très riche pour un devoir maison de Terminale S.

La construction d'un nombre particulier

Les apports d'un tel travail sont variés, selon que l'on puisse traiter une ou plusieurs méthodes. La diversité permet la comparaison, mais chacune est, à elle toute seule, l'occasion d'une exploration à plusieurs niveaux (géométrique, algébrique, informatique ...). Elles permettent d'appriivoiser un nombre qui sort en général de la "boîte noire" de la calculatrice, en le construisant progressivement. Bien sûr, le pouvoir de chaque méthode est de permettre de calculer d'autres racines carrées sans difficulté supplémentaire autre que l'ordre de grandeur du nombre cherché. Le développement informatique donne l'occasion de s'interroger sur la nature des nombres obtenus et les limites du tableur ainsi que ses avantages. Enfin, on ne rappellera jamais assez que de marcher dans les pas des mathématiciens reste un moyen privilégié pour l'élève de construire son chemin dans les mathématiques.

De par sa banalité apparente, racine carrée de 2 n'a pas toujours les faveurs des collègues qui lui préfèrent souvent la moitié de racine carrée de 5 augmentée de 1 (le nombre d'or pour ne pas le nommer) pour son côté mythique et la variété des calculs qu'il occasionne. On ne pourra que renvoyer le lecteur au « Fabuleux destin de $\sqrt{2}$ » pour corriger cette négligence.

Bibliographie

- APMEP brochure n°27 : "Pour une mathématique vivante en seconde" 1984
 - B. Rittaud : Racine de 2 : conférence La Villette octobre 2006 ; Gazette SMF 107 Janvier 2006 ; "Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$ " (Le Pommier)
 - L. Euler : "Introduction à l'Analyse des infiniment petits " 1748
 - R. Caratini : "Les mathématiciens de Babylone" Presses de la Renaissance
-