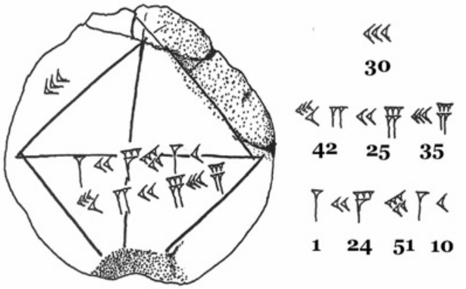
RACINE CARRÉE DE 2 À TRAVERS LES ÂGES : DES BABYLONIENS À EULER (1ère partie)

Gilles Waehren
Lycée Mangin, Sarrebourg

La méthode des Babyloniens

Présentation de la tablette

La tablette numérotée YBC 7289, dont le calque est reproduit ci-dessous, est datée sur la période -1900 à -1600 avant notre ère. Elle a été surnommée « La Pierre de Rosette des mathématiques ».



Le côté du carré est 30 et les symboles à l'intérieur donnent, dans la numération sexagésimale :

- d'une part, la longueur de la diagonale : 42.25.35
- d'autre part le rapport entre les deux : 1,24.51.10

avec $1,24\cdot 51\cdot 10 = 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=\frac{30547}{21600}\approx 1,41421$

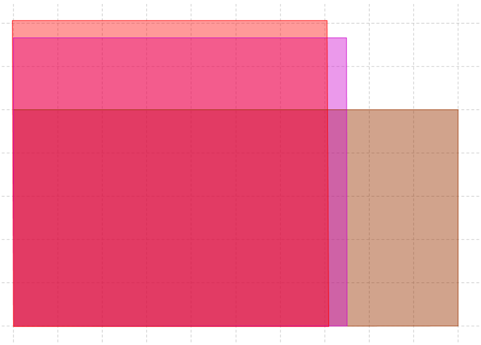
Petit historique

Situons rapidement les mathématiques de Babylone. 4000 ans avant notre ère, en Mésopotamie, s'érigent les premières cités de l'humanité (Sumer…). Leur activité nécessite une gestion efficace, notamment pour assurer le bon fonctionnement du commerce ; les mathématiques prennent leur essor dans leurs applications aux finances ou à la construction.
"Le cadeau des Sumériens à la postérité n'est autre que l'expert-comptable" (Nick Murphy, « L'extraordinaire aventure du nombre 1 »)
La formation de scribes-mathématiciens permettra de construire progressivement des mathématiques plus abstraites orientées vers un calcul algébrique assez poussé pour l'époque. Cependant, les tablettes retrouvées ne permettent pas d'établir l'existence de démonstrations des résultats. Elles n'ont pas non plus fourni de traces de recherches avancées dans le domaine de la géométrie. En ce sens, la tablette qui nous intéresse ici fait presque figure d'exception.

retour sommaire

Les rectangles successifs

Certains chercheurs pensent que les Babyloniens utilisaient des constructions géométriques pour l'élaboration de leurs algorithmes de calculs (voir article « Équations du second degré à Babylone »). C'est pourquoi on est en droit de penser que le calcul de la racine carrée de 2 repose sur la construction de rectangles successifs, jusqu'à obtenir un carré dont l'aire est 2, afin d'estimer le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté. Une idée confortée par la présentation de la tablette avec un carré assis sur l'un de ses sommets et le tracé des deux diagonales.
Pour commencer, on considère un premier rectangle de dimensions 2 sur 1 (d'aire 2). Le deuxième rectangle d'aire 2 aura pour longueur la moyenne des dimensions du premier. Le troisième rectangle se construit comme le deuxième. Si l'on réalise une figure sur papier en partant d'un rectangle de 20 cm sur 10 cm, le troisième rectangle a pour dimensions 14,17 cm par 14,12 cm. La quatrième étape nous oblige à dessiner un carré !



Les calculs

Le tableau ci-dessous reprend les calculs effectués.

Rectangle n°	Longueur		Largeur	
	Valeur	A l'échelle	Valeur	A l'échelle
1	2	20 cm	1	10 cm
2	$\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$	15	$2 \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$	$\approx$ 13,33
3	$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{17}{12}$	$\approx$ 14,17	$2 \div \frac{17}{12} = \frac{24}{17}$	$\approx$ 14,12
4	$\frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right)=\frac{577}{408}$	$\approx$ 14,14	$2 \div \frac{577}{408} = \frac{81}{57}$	$\approx$ 14,14

La dernière longueur donne, dans le système sexagésimal :
$\frac{577}{408} = 1{,}24 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 35$ à comparer avec la valeur de la tablette (1,24.51.10).
La poursuite du calcul sur tableur fait apparaître une constance du résultat dès l'étape 6.

retour sommaire

Rectangle n°	Longueur	Largeur
1	2	1
2	1,5	1,33333333333333
3	1,41666666666667	1,41176470588235
4	1,41421568627451	1,41421143847487
5	1,41421356237469	1,41421356237150
6	1,41421356237310	1,41421356237310
7	1,41421356237310	1,41421356237310
8	1,41421356237310	1,41421356237310
9	1,41421356237310	1,41421356237310
10	1,41421356237310	1,41421356237310
11	1,41421356237310	1,41421356237310
12	1,41421356237310	1,41421356237310
13	1,41421356237310	1,41421356237310
14	1,41421356237310	1,41421356237310
15	1,41421356237310	1,41421356237310

racine de 2 : 1,41421356237310

On peut alors constater la convergence quadratique de la suite des longueurs puisque le nombre de décimales égales à celle de $\sqrt{2}$ double à chaque étape. Les Babyloniens ont ainsi obtenu une précision à 10^{-4} dès le quatrième rectangle, alors que leurs calculs faisant intervenir π devaient se contenter d'une valeur approchée à 10^{-1}.

La méthode des fractions continuées

Les fractions continues (continuées de nos jours) sont connues depuis l'antiquité par leur utilisation dans l'extraction des racines carrées. Certaines tablettes babyloniennes y font clairement référence. Elles auraient pu servir dès cette époque à approcher $\sqrt{2}$. Elles sont reprises en Egypte par Théon d'Alexandrie également dans le calcul approché de racines carrées.
La Renaissance en Europe voit leur réapparition, par exemple dans le calcul de la racine carrée de 13 par Bombelli. Décrites ensuite par Euler dans son introduction à l'analyse infinitésimale, elles auront encore de beaux jours sous la plume de Lagrange, Lambert, Hermite ou Lindeman pour finalement démontrer la transcendance de π et e.

Le texte d'Euler traduit par Lagrange

On appelle, en général, fraction continue, toute expression de cette forme :

$$\alpha+\cfrac{b}{\beta+\cfrac{c}{\gamma+\cfrac{d}{\delta+\ldots}}}$$

Où les quantités α, β, δ, … a et b, c, ... sont des nombres entiers positifs ou négatifs, mais nous ne considérerons ici que les fractions continues dont les numérateurs b, c, d…sont égaux à l'unité, c'est-à-dire celles qui sont de la forme :

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\ldots}}}$$

Le développement d'un rationnel en fraction continue : exemple avec la fraction $\dfrac{297}{210}$

Algorithme d'Euclide	Développement en fraction continuée
$297=210\times1+87$	$\dfrac{297}{210}=1+\dfrac{87}{210}=1+\cfrac{1}{\cfrac{210}{87}}$
$210=87\times2+36$	$\dfrac{297}{210}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{36}{87}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{87}{36}}}$
$87=36\times2+15$	$\dfrac{297}{210}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{15}{36}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{36}{15}}}}$
$36=15\times2+6$	$\dfrac{297}{210}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{6}{15}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{15}{6}}}}}$
$15=6\times2+3$	$\dfrac{297}{210}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{6}}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$

On note alors : $\dfrac{297}{210}=[1\,;2,2\,,2\,,2\,,2]$. On peut donc approcher $\dfrac{297}{210}$ par ses réduites successives : $1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$; $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\dfrac{7}{5}$; $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\dfrac{17}{12}$ etc.

Le développement d'un rationnel en fraction continuée est fini.

Considérons maintenant le développement en fraction continuée de $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$$

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

On retrouve dans cette dernière expression le « motif » $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ donc le développement en fraction continuée de $\sqrt{2}$ est périodique et infini : $\sqrt{2}=[1\ ;2,2\ ,2\ ,2\ ,\ldots]$. Cela peut être considéré comme une caractérisation des irrationnels.
Les valeurs approchées des réduites successives s'obtiennent facilement sur tableur :

n	écriture décimale de la réduite
0	1
1	1,5
2	1,4
3	1,416666667
4	1,413793103
5	1,414285714
6	1,414201183
7	1,414215686
8	1,414213198
9	1,414213625
10	1,414213552
11	1,414213564
12	1,414213562
13	1,414213562
14	1,414213562
15	1,414213562
16	1,414213562
17	1,414213562
18	1,414213562

On aura relevé, au passage, que $\frac{297}{210}$ est l'une des réduites de ce développement.
Les fractions continues permettent donc d'approcher (lentement mais sûrement) les racines carrées des nombres entiers.

La suite de cet article paraîtra dans le Petit Vert n° 103 de septembre.

retour sommaire