ꕤ ꕤ ꕤ ꕤ ꕤ ꕤ ꕤ ꕤ ꕤ ꕤ

Tout sur 2010

Dans le Petit Vert n°100, nous vous avions proposé un certain nombre de propriétés du nombre 100. Avec la nouvelle année, nous nous attaquons au nombre 2010…

$2010 = 2\times3\times5\times67$ (décomposition en facteurs premiers)
Les diviseur de 2010 sont donc {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005, 2010}. La somme des diviseurs de 2010 (excepté 2010) est 2886, donc 2010 est un nombre **abondant** ; alors que 2009 était un nombre **déficient** : la somme des ses diviseurs (excepté 2009) est 385.

Comment obtenir 2010 ?

Avec uniquement des 2, sans utiliser la puissance 2 :
$2\times2\times2\times2\times(2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\text{-}2)\text{-}2\text{-}2\text{-}2 = 2010$ [15 chiffres 2]

Sans soustraction [uniquement des ×, des + et des parenthèses] :
$2+2\times2\times(2+2\times(2+2\times2\times(2+2\times(2+2\times(2+2\times(2+2\times2)))))) = 2010$ [17 chiffres 2]

Avec uniquement le chiffre 1 (le créateur) et les symboles × + ( ) : 2010 =
$(1+1)\times(1+1+1)\times(1+1+1+1+1)\times\mathbf{(}(1+1)\times(1+1+1)\times\mathbf{(}(1+1+1)(1+1+1)+1+1\mathbf{)}+1\mathbf{)}$
[24 chiffres 1]

Qui dit mieux ?

retour sommaire

Solution du problème n°100

<u>Rappel de l'énoncé</u> : Pour le numéro 100 du « Petit Vert », l'APMEP de Lorraine a, comme vous le savez tous, décidé de sortir un album de 100 mathématiciens à collectionner. Les autocollants des mathématiciens sont vendus par pochettes de 5 (tous les autocollants d'une pochette étant différents). Écrire un algorithme permettant d'estimer le nombre moyen de pochettes nécessaires pour compléter l'album.

Merci à Jacques Choné, Renaud Dehaye et Jacques Verdier pour leurs solutions (ils ont gagné une pochette d'autocollants). Les lecteurs attentifs n'auront pas manqué de s'apercevoir que ce problème n'était pas tout à fait comme les autres, puisqu'il s'agit d'algorithmique : est-ce vraiment des maths, ou plutôt de l'informatique ? Vaste débat. Toujours est-il qu'il nous incombe d'initier les élèves à cette matière, et qu'il peut être intéressant d'y réfléchir. Le problème posé est assez difficile d'un point de vue théorique, mais il est tout à fait possible d'y répondre de façon approchée, à l'aide d'une simulation, au niveau lycée. En ce qui me concerne, tout cela reste des mathématiques à condition de connaître le niveau d'incertitude du résultat (ce qui est souvent plus délicat que ne le laissent penser les programmes). Bref. L'algorithme peut se présenter ainsi :

```
S, SC, M, EC : réels nuls au départ
Choisir n
POUR i variant de 1 à n faire
      L liste à 100 éléments, tous nuls ; C entier nul
      TANT QUE min(L)<1 faire
            Incrémenter C
            P tirage de 5 éléments distincts dans {1,...,100}
            POUR j dans P faire
                  L[j] prend la valeur L[j]+1
            FIN POUR
      FIN TANT QUE
S prend la valeur S+C
SC prend la valeur SC+C^2
FIN POUR
M prend la valeur S/n
EC prend la valeur RACINE(SC/n-M^2)
```

On obtient M nombre de paquets moyens à acheter, et EC l'écart-type qui permet de donner un intervalle « de confiance ». Pour $N = 10\ 000$, Jacques Verdier obtient ainsi, avec un programme en Python écrit par Michel Barthel (merci

Michel) : au seuil de 5% (en approchant la loi par une loi normale, donc à un seuil pas vraiment maîtrisé, écrivez-moi si je me trompe) on a :

$$101{,}58 \leq M \leq 102{,}56$$

Le lecteur, pas si inattentif qu'il en a l'air, aura peut-être tiqué sur la ligne 6 : tirage de 5 éléments distincts. Est-ce simple ? Tout dépend du langage utilisé... Avec le langage « R » (libre, très intéressant, mais dotée interface peut-être encore austère) on a l'instruction *sample*(L,5) qui permet de choisir 5 éléments dans une liste L... Il existe des équivalents en Maple, Mathematica. Avec Algobox ou Python, par contre, il faut créer ce tirage « à la main »...

Une question reste à étudier : que se passe-t-il si plusieurs personnes s'associent pour faire leurs collections ? (c'est ce qui se passe dans la pratique, avec les échanges). Soient k le nombre de personnes : elles achètent les paquets jusqu'à obtenir k collections : est-ce intéressant ?

Voici la traduction de l'algorithme précédent en langage R :

```
n=10000; s=0; sc=0; m=0; ec=0;
for (i in 1:n){
       L=rep(0,100); c=0;
       while (min(L)<1) {
                     c=c+1;
                     p=sample(1:100,5);
                     for (j in p){L[j]=L[j]+1}
              }      # fin du while
              s=s+c; sc=sc+c^2;
} # fin du for
m=s/(n);m
ec=sqrt(sc/(n)-m^2);ec
```

Résultats : $\mathbf{101{,}73 < \mathit{M} < 102{,}71}$

Annexe 1 : programme Python

Programme en langage Python (version 3 minimum) écrit par Michel Barthel à partir de l'algorithme de Jacques Verdier. La fonction `tirage` effectue un tirage aléatoire sans remise de k éléments pris parmi p :

```
from math import *
from random import *

def tirage(k,p):
```

retour sommaire

```
    LKP=[]
    for i in range(k):
        a=randint(1,len(LP))
        x=LP[a-1]
        LKP.append(x)
        del LP[a-1]
    return LKP

def experience():
    ne=0
    L=[]
    for i in range(100):
        L.append(0)
    while sum(L)!= 100:
        L5=tirage(5,100)
        for i in range(5):
            v=L5[i]
            L[v-1]=1
        ne=ne+1
    return ne

def pb_100():
    N=int(input("Nombre de simulations ? "))
    som_ne=0
    som_car_ne=0
    for i in range(N):
        ne=experience()
        som_ne=som_ne+ne
        som_car_ne=som_car_ne+ne*ne
    moy=som_ne/N
    ect=sqrt(som_car_ne/N-moy*moy)
    print("La moyenne est ",moy)
    print("intervalle de confiance (risque 5%):
[",moy-1.96*ect/sqrt(N),moy+1.96*ect/sqrt(N),"]")

#Programme principal
pb_100()
```

N.d.l.r. Ce programme sera mis en téléchargement sur le site, ce qui vous permettra, si vous travaillez en Python, de l'implémenter directement.

D'autres solutions, et plus de détails, sur notre site

retour sommaire

Annexe 2 : programme Maple

Programme envoyé par Jacques Choné, fidèle lecteur auvergnat (de Chamalières) et grand pourvoyeur de solutions à nos problèmes… On considère d'abord la variable aléatoire, *X*, égale au nombre de pochettes acquises jusqu'à l'obtention de la collection complète (on suppose que les pochettes sont indépendantes et que chacune est une 5-partie aléatoire de l'ensemble des 100 mathématiciens numérotés de 1 à 100).

Le programme Maple suivant donne X :

```
>restart:randomize():
>x:=proc() local c,t,a;a:={ };c:=0;
while nops(a)<100 do
                t:=combinat[randcomb](100,5);
a:=a union t; c:=c+1 od; c end:
```

Exemple :

```
>x();
147
```

(c'est-à-dire que sur cet essai, il a fallu acheter 147 pochettes)

On considère ensuite, pour n "grand", M_n = la moyenne des X_i où les X_i sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que X. On sait que M_n est un estimateur de la moyenne de X.

L'algorithme en Maple, est:

```
>M:=proc(n) local s,i;s:=0;for i from 1 to n do
s:=s+x() od;s/n end:
```

Résultat avec n = 10 000 :

```
>evalf(M(10000));
102.2942
```

Cette simulation, comme les précédentes, montre qu'il faut acheter en moyenne **102** paquets.

retour sommaire

Problème du trimestre n°101

proposé par François Drouin

ABCD est un parallélogramme. Les bissectrices des angles A et B se coupent en I. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de faire remarquer que le point I peut être extérieur ou intérieur au parallélogramme. Comment caractériser les parallélogrammes ABCD pour lesquels le point I est un point du segment [DC] ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à : Loïc Terrier, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 Ars sur Moselle (ou loic.terrier**AT**free.fr).

AVIS DE RECHERCHE

Depuis la création de nos dix sept stands "Objets Mathématiques", nous avons modifié les panneaux d'explication, nous avons créé des versions dans d'autres langues que le français. Nous voudrions maintenant donner une nouvelle jeunesse aux objets qui sont manipulés et nous sommes à la recherche de quelqu'un qui pourrait nous découper en particulier des cubes ou des pavés en bois. N'y aurait-il pas dans l'entourage de nos lecteurs quelques bricoleurs pouvant nous aider ?

Contacter francois.drouin2@wanadoo.fr