Solution du problème n°97

Tiré de "récréations arithmétiques" de E. Fourrey : "Trois hommes ont trouvé une bourse contenant un certain nombre d'écus, dont chacun prend sans compter. Puis ils se mettent à jouer aux dés en convenant que le perdant devra donner aux deux autres autant d'écus qu'ils en ont chacun. Ils jouent trois parties et perdant une fois chacun, ils se trouvent avoir autant d'écus l'un que l'autre, c'est-à-dire 8 écus. Combien chacun d'eux avait-il pris d'écus dans la bourse?"

1. Résoudre le problème.

2. Le jeu s'arrête si l'un des joueurs n'a pas de quoi payer les deux autres. On suppose que chacun des joueurs perd à tour de rôle; montrer que si le nombre initial d'écus n'est pas un multiple de 7, alors le jeu s'arrêtera au bout d'un nombre fini de parties.

Merci à Jacques Choné pour sa solution, toujours très détaillée. La première question pouvait se traiter de façon « élémentaire », mais la deuxième était plus ardue !

1. Soit x, y, z les sommes que les hommes A, B, C ont prises ; on suppose qu'ils perdent à tour de rôle dans cet ordre. Les sommes dont ils disposent, respectivement, à l'issue de chacune des trois parties sont $x-y-z, 2y, 2z$, puis $2(x-y-z), 2y-(x-y-z)-2z = 3y-x-z, 4z$ et, enfin, $4(x-y-z), 6y-2x-2z, 4z-(3y-x-z)-(2x-2y-2z) = 7z-x-y$. En résolvant le système obtenu en égalant à 8 chacun de ces trois derniers nombres, on trouve $x = 13, y = 7, z = 4$.

2. On va montrer un peu plus que ce qui est demandé, à savoir que le jeu ne s'arrêtera pas au bout d'un nombre fini de parties si et seulement s'il existe un entier positif, k , tel que $x = 4k, y = 2k, z = k$ (en gardant les mêmes notations qu'au 1).

Supposons que le jeu ne finisse jamais et notons x_n, y_n, z_n les sommes dont disposent respectivement A, B, C au bout de $3n$ parties. La méthode du 1 montre

que
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$
 On en déduit, par récurrence,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Or, on obtient par les méthodes habituelles, $M = P.D.P^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 6 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ puis } \begin{cases} x_n = \frac{1}{7}(4(x+y+z) - 8^n(-3x+4y+4z)) \\ y_n = \frac{1}{7}(2(x+y+z) - 8^n(2x-5y+2z)) \\ z_n = \frac{1}{7}((x+y+z) - 8^n(x+y-6z)) \end{cases}$$

Posons $z = k \in \mathbf{N}^*$. Pour que x_n, y_n, z_n soient positifs pour tout $n \in \mathbf{N}$, il est nécessaire que

$$\begin{cases} -3x + 4y \leq -4k \\ 2x - 5y \leq -2k \\ x + y \leq 6k \end{cases}$$

En considérant l'intersection, dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$, des demi-plans convenables limités par les droites d'équations $x+y=6k, 2x-5y=-2k, -3x+4y=-4k$ concourantes au point $(4k, 2k)$, on voit que seul ce point convient. On doit donc avoir $x=4k, y=2k, z=k$ ($k \in \mathbf{N}^*$). On a ainsi montré la condition nécessaire annoncée.

Réciproquement, supposons que $x=4k, y=2k, z=k$ ($k \in \mathbf{N}^*$). Les sommes dont disposent A, B, C à l'issue des trois premières parties sont (voir le 1) $k, 4k, 2k$, puis $2k, k, 4k$ et enfin $4k, 2k, k$ et on est revenu à la situation initiale, ce qui montre que le jeu ne s'arrêtera pas.

Problème du trimestre n°98

proposé par Loïc Terrier, d'après un énoncé de Patrick Meyer.

On considère un jeu de 52 cartes. On enlève les quatre rois, on mélange. On tire ensuite, successivement, les huit premières cartes du paquet, en énumérant « un, deux, trois, . . . ». On gagne si l'une des cartes tirées a la valeur annoncée (ex : si la 3^{ème} carte est un 3).

Le jeu est-il équilibré ? (autant de chances de gagner que de perdre)

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou toute proposition de nouveau problème à : Loïc Terrier, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 Ars sur Moselle (ou loic.terrierATfree.fr).