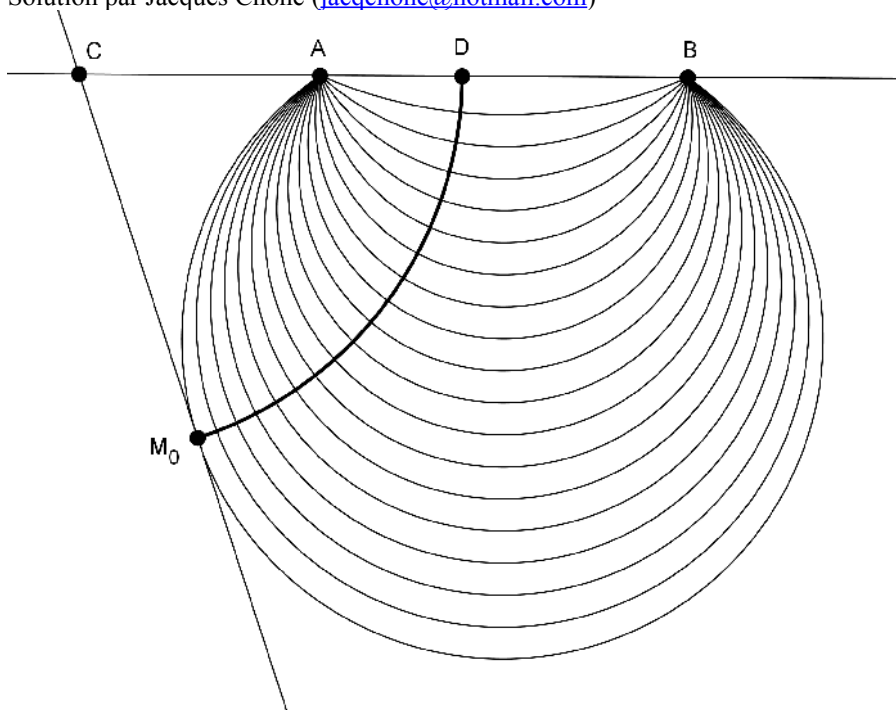


Solution du problème n°99

Rappel de l'énoncé : Un joueur de football se dirige, balle au pied, vers le but adverse. Quelle est la trajectoire qui lui assure à tout instant le plus grand angle de tir possible ?

Solution par Jacques Choné (jacqchone@hotmail.com)



Soit A et B les extrémités du but visé. A chaque point M du terrain T, associons l'angle $\theta(M)$ sous lequel on voit le segment [A, B]. Soit M_0 la position initiale du joueur. Le problème est de déterminer la courbe partant de M_0 maximisant en tout point M l'accroissement $d\theta = \theta(M + dM) - \theta(M)$.

On sait [voir, par exemple (1) ou (2)] que $\text{grad}_M \theta$ est orthogonal à la ligne de niveau de θ passant par M (ensemble des points N tels que $\theta(N) = \theta(M)$) et est dirigé dans la direction et le sens maximisant l'accroissement $d\theta$. Les courbes cherchées sont donc les courbes orthogonales aux courbes de niveau. Or les lignes de niveau de la fonction $M \rightarrow \theta(M)$ sont les intersections avec le terrain T des

cercles passant par A et B (arcs capables, voir le théorème de l'angle inscrit). Ces cercles appartiennent au faisceau de cercles, F , de points de base A et B. Donc les trajectoires cherchées sont des parties des cercles du faisceau orthogonal à F c'est-à-dire du faisceau à points de Poncelet (ou à points limites) A et B [voir, par exemple (3)].

Conclusion : pour avoir la trajectoire cherchée issue du point M_0 , on trace le cercle Γ passant par A, B et M_0 ; soit Γ le cercle centré à l'intersection de la droite (A,B) et de la tangente en M_0 à Γ . Ce cercle Γ est orthogonal à Γ et à tous les cercles du faisceau F . La trajectoire cherchée est l'arc de Γ compris entre M_0 et le segment [A, B].

Remarque : si M_0 est sur la médiatrice du segment[A, B], alors Γ est précisément cette médiatrice et la trajectoire cherchée est le segment joignant M_0 au milieu de [A, B].

Références :

- (1) http://fr.wikiversity.org/wiki/Analyse_vectorielle/Gradient
- (2) <http://www.math.u-psud.fr/~pansu/webasm/fonctions.pdf>
- (3) http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Faisceau_de_cercles&printab
- (4) <http://www.mathcurve.com/courbes2d/orthogonale/orthogonale.shtml>

Problème du trimestre n°100

proposé par Loïc Terrier

Pour le numéro 100 du « Petit Vert », l'APMEP de Lorraine a, comme vous le savez tous, décidé de sortir un album de 100 mathématiciens à collectionner. Les autocollants des mathématiciens sont vendus par pochettes de 5 (tous les autocollants d'une pochette étant différents).

Ecrire un algorithme permettant d'estimer le nombre moyen de pochettes nécessaires pour compléter l'album.

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à : Loïc Terrier, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 Ars sur Moselle (ou loic.terrier@free.fr).