ÉTUDE MATHÉMATIQUE

Isabelle Dubois

Cent diviseurs

Quel est le plus petit nombre entier possédant exactement cent diviseurs ?
La réponse n'est pas immédiate. Pour trouver ce nombre, nous devons utiliser un résultat fondamental d'arithmétique : la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier.

Première étape : Trouvons le nombre de diviseurs d'un nombre entier, à l'aide de sa décomposition en facteurs premiers.
Si n est un entier s'écrivant $p_1^{\alpha_1}\times ...\times p_2^{\alpha_2}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i des nombres entiers non nuls, alors tous les diviseurs de n sont de la forme $p_1^{\beta_1}\times ...\times p_2^{\beta_2}$, avec $0\leq \beta_i \leq \alpha_i$. Ce fait parait évident, mais peut bien entendu se justifier en toute rigueur.
Ainsi, puisque j'ai α_1+1 choix pour l'exposant de β_1, ..., α_r+1 choix pour l'exposant de β_r, on en déduit que n possède exactement $(\alpha_1+1)\times ...\times(\alpha_r+1)$ diviseurs.

Deuxième étape : Cherchons la forme de tous les nombres entiers possédant exactement cent diviseurs.
D'après l'étape précédente, nous devons trouver r entiers α_i tels que $(\alpha_1+1)\times ...\times(\alpha_r+1)=100$. Il est aisé de lister toutes les décompositions multiplicatives de 100, par nombre croissant de facteurs :

$$100=2\times 50=4\times 25=10\times 10=5\times 20=2\times 2\times 25=2\times 5\times 10$$
$$=5\times 5\times 4=2\times 2\times 2\times 5$$

Ainsi, les nombres entiers possédant exactement cent diviseurs sont de neuf formes différentes (les entiers apparaissant ci-dessous étant des nombres premiers) :
a) p_1^{99} b) $p_1\times p_2^{49}$ c) $p_1^3\times p_2^{24}$ d) $p_1^9\times p_2^9$ e) $p_1^4\times p_2^{19}$
f) $p_1\times p_2\times p_3^{24}$ g) $p_1\times p_2^4\times p_3^9$ h) $p_1^4\times p_2^4\times p_3^3$ i) $p_1\times p_2\times p_3^4\times p_4^4$.

Troisième étape : Déterminons le plus petit nombre entier pour chacune de ces neuf formes.
Il suffit à chaque fois de choisir les plus petits nombres premiers... Nous obtenons :

retour sommaire

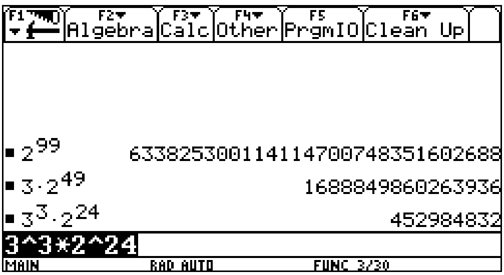
a) 2^{99}, un nombre de 30 chiffres ;
b) 3×2^{49}, un nombre de 16 chiffres ;
c) $3^3\times2^{24}$, un nombre de 9 chiffres ;
d) $2^9\times3^9$ = 10 077 696, un nombre de 8 chiffres ;
e) $3^4\times2^{19}$ = 42 467 328, un nombre de 8 chiffres ;
f) $3\times5\times2^{24}$ = 251 658 240, un nombre de 9 chiffres ;
g) $5\times3^4\times2^9$ = 207 360, un nombre de 6 chiffres ;
h) $2^4\times3^4\times5^3$ = 162 000, un nombre de 6 chiffres ;
i) $5\times7\times2^4\times3^4$ = 45 360.

Conclusion : Le grand gagnant est le nombre **45 360** qui est donc le plus petit nombre entier possédant exactement cent diviseurs. Je laisse au lecteur le soin d'en établir la liste !

Variantes : Nous pouvons aussi déterminer :

- le plus petit entier impair possédant exactement cent diviseurs ; c'est $11\times7\times5^4\times3^4$ = 3 898 125.
- le plus petit entier possédant exactement cent diviseurs, dont le nombre 100 ; c'est : $2^4\times3^4\times5^3$ = 162 000.
- le plus petit cube possédant exactement cent diviseurs ; c'est : $2^9\times3^9$ = 10 077 696.
- le plus petit cube possédant exactement cent diviseurs, dont le nombre 100
- ; c'est : $2^9\times5^9 = 10^9$ ou encore $\left(\sqrt{100}\times 100\right)^3$.

Pour finir, une question ouverte : quel est le plus petit nombre entier possédant exactement cent diviseurs et s'écrivant avec cent chiffres ?



Ajout de la rédaction : les nombres a), b) et c) de la troisième partie à la calculatrice.

retour sommaire