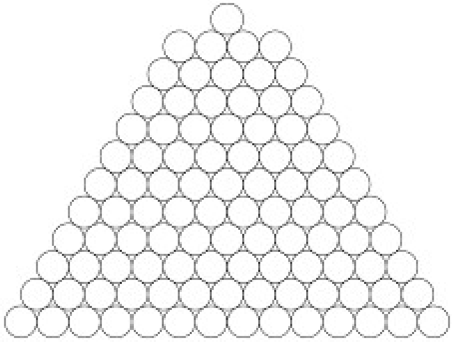
Nombres triangulaires multiples de 100



91 et 105 sont des nombres triangulaires, mais 100 n'en est pas un. La figure ci-contre nous montre qu'il l'est « presque » !!!
Suite à cette boutade, François a émis l'idée de rechercher s'il existait des nombres triangulaires multiples de cent, ce qui revient à rechercher n tel que $n(n+1)/2 = k\cdot 100$ (n étant le nombre « d'étages »).
Aussitôt, Jacques a bondi sur son tableur, et a trouvé que c'était vérifié pour $n = 24$, $n = 175$, $n = 199$, $n = 200$ et ainsi de suite avec une période de 200 (224, 375, 399, 400, 424…).
Restait à démontrer cette propriété « arithmétiquement », sans tableur ou autre « machine ». Voici la preuve proposée par Isabelle Dubois :

Nous cherchons donc les entiers n tels que $n(n+1) = 200k$, où n et k sont des entiers.

Première étape :
Si a est une solution, alors tous les nombres entiers de la forme $a + 200u$ (u entier) sont solutions.
En effet, $(a+200u)(a+200u+1) = a(a+1) + 200((2a+1)u+u^2)$: c'est un multiple de 200.
De même, si a est une solution, alors tous les nombres entiers de la forme $a-200u$ (u entier) sont solutions.
En effet, $(a-200u)(a-200u+1) = a(a+1) + 200(-(2a+1)u+u^2)$: c'est un multiple de 200.

Deuxième étape :
Il nous reste à chercher les solutions comprises entre 0 et 199. En effet, si a est une solution supérieure ou égale à 200, alors il existe u entier tel que $a - 200u$ est solution et inférieur ou égal à 199.
Avec un tableur ou un algorithme, on trouve : 0, 24, 175, 199.
D'où l'ensemble des solutions :
$200u$, $24+200u$, $175+200u$, $199+200u$, avec u entier.

retour sommaire

Remarque sur la deuxième étape :
Il est facile de voir que l'on peut se restreindre à chercher un entier n solution entre 0 et 199, et tel que n ou $n+1$ est multiple de 25 (ce qui restreint la recherche aux entiers 0, 24 ou 25, 49 ou 50, 74 ou 75, 99 ou 100, 124 ou 125, 174 ou 175, 199) !
En effet, puisque 200 ($= 2^3 5^2$) divise $n(n+1)$, alors 5^2 divise $n(n+1)$.
Or, on ne peut avoir 5 divise n et 5 divise $n+1$, d'où 25 divise n ou (exclusif) divise $n+1$.
De même, par un raisonnement identique, on voit que 2^3 divise n ou (exclusif) $n+1$.
Ainsi, il ne reste plus que : 0, 24, 175, 199.
Et voilà, plus aucune calculatrice ou ordinateur à utiliser !

Un bon exercice pour vos élèves ? L'arithmétique est au programme de terminale S, spécialité maths. Par ailleurs, les démonstrations proposées avant la remarque finale mettent en œuvre des connaissances d'un élève de seconde, et les démonstrations par disjonction des cas sont intéressantes à ce niveau. Si de plus il y a un petit coup d'algorithme ou de tableur pour trouver les premières solutions, c'est parfait en seconde.

retour sommaire