

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

Qui peut le plus...

La question subsidiaire du rallye 2008 était la suivante :

Partager le nombre 28 en une somme d'entiers positifs telle que le produit de ces entiers soit le plus grand possible.

Exemples pour mieux comprendre : Premier partage : $28 = 14 + 14$. Le produit vaut $14 \times 14 = 196$.

Deuxième partage : $28 = 10 + 10 + 8$. Le produit vaut $10 \times 10 \times 8 = 800$, c'est nettement mieux !

La réponse était la suivante : les meilleurs partages sont : $28 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2$, qui aboutissent tous deux au produit maximal 26 244.

Nous allons démontrer le théorème suivant : ***Pour tout entier naturel $N \geq 5$, la décomposition « optimale » en somme d'entiers naturels est composée uniquement de 3 et éventuellement un 2, ou un 4 ou deux 2.***

On verra qu'à un moment dans la démonstration la condition $N \geq 5$ sera utilisée. Pour les entiers N de 1 à 4, il suffit d'écrire la liste des décompositions pour trouver quelle est la « meilleure ». Pour $N=1$, une seule décomposition possible, qui donne comme produit 1, cas trivial. Pour $N=2$, deux décompositions possibles : $1+1$ ou 2 ; c'est évidemment 2 qui sera choisi (car $1 \times 1 = 1$). Pour $N=3$, trois décompositions possibles : $1+1+1$, $1+2$ et 3 ; c'est la troisième qui sera choisie. Et enfin pour $N=4$, cinq décompositions possibles : $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+3$, $2+2$ et 4 ; le produit le plus grand est obtenu pour les deux dernières, « ex æquo » : $2 \times 2 = 4$.

Démonstration du théorème :

a) Pour toute décomposition de N en k termes ($k \geq 2$), si l'un d'entre eux vaut 1, on obtiendra une décomposition « meilleure » en ajoutant ce 1 à n'importe quel autre terme t : en effet $(t+1)$ est toujours strictement supérieur à $t \times 1$.

Conséquence : la décomposition optimale ne peut pas contenir de 1.

b) Si l'un des termes t de la décomposition est supérieur ou égal à 5, on obtiendra une décomposition « meilleure » en redécomposant t en $(t-3)$ d'une part et 3 d'autre part. Il suffit, pour le prouver, de démontrer que $t \times (t-3) > t$; ce qui est « évident », car $(t-3) > 1$ puisque $t \geq 5$.

Conséquence de a) et b) : la décomposition optimale ne peut contenir que des 2, des 3 ou des 4.

c) Si la décomposition « optimale » contient des 4, elle ne peut en contenir qu'au plus un.

En effet : si elle contenait deux 4, on pourrait remplacer $4+4$ par $3+3+2$ qui donnerait une décomposition « meilleure », car $3 \times 3 \times 2 > 4 \times 4$.

d) Si la décomposition « optimale » contient des 2, elle ne peut en contenir qu'au plus deux.

En effet : si elle contenait trois 2, on pourrait remplacer $2+2+2$ par $3+3$ qui donnerait une décomposition « meilleure », car $3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2$.

e) Et enfin, la décomposition « optimale » ne peut contenir à la fois un 2 et un 4 : on pourrait remplacer $2+4$ par $3+3$, car $3 \times 3 > 2 \times 4$.

On a donc démontré que la décomposition ne peut contenir que des 3, et éventuellement soit un seul 2, soit un seul 4, soit deux 2. Il est aisé de démontrer qu'une décomposition contenant deux 2 est équivalente à celle contenant un seul 4, car $2 \times 2 = 4$. Hormis ce cas d'ex æquo, la décomposition « optimale » est unique.

Pour être plus « mathématique » :

Si $N = 3k$, alors la décomposition « optimale » est $N = 3 + 3 + \dots + 3$ (k termes 3) qui donnera le produit $P = 3^k$.

Exemple : $27 = 3+3+3+3+3+3+3+3+3$ et $P = 3^9 = 19\,683$.

Si $N = 3k+1$, alors la décomposition « optimale » est $N = 4 + 3 + 3 + \dots + 3$ (avec $k-1$ termes 3) qui donnera le produit $P = 4 \times 3^{k-1}$ ou bien $N = 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + 3$ (avec $k-1$ termes 3) qui donnera le produit $P = 2 \times 2 \times 3^{k-1}$, égal au précédent.

Exemple : $28 = 3+3+3+3+3+3+3+3+4 = 3+3+3+3+3+3+3+3+2+2$, et $P = 26\,244$.

Si $N = 3k+2$, alors la décomposition « optimale » est $N = 2 + 3 + 3 + \dots + 3$ (avec k termes 3), qui donnera le produit $P = 2 \times 3^k$.

Exemple : $29 = 2+3+3+3+3+3+3+3+3+3$, et $P = 39\,366$.

Autre approche du problème :

On sait que, à périmètre donné, le quadrilatère qui a la plus grande aire est le carré : si l'on veut décomposer un nombre N en une somme de deux termes a et b

dont le produit soit maximal, la solution est $a = b = \frac{N}{2}$. Remarquons au passage

qu'on travaille alors implicitement dans $\mathbb{R}^+$. Dans $\mathbb{N}$, cela n'est pas toujours

possible (prenez par exemple $N = 5$, où on aura $a = 3$ et $b = 2$, ce qui ne correspond pas à un carré).

Mais cela peut donner envie de dire que la réponse à notre problème de décomposition « optimale » serait la suivante : ***il faudrait que les termes de la décomposition soient les plus égaux possibles*** (formulation qu'il est, au passage,

difficile de mathématiser). Voyons ce que cela donne dans $\mathbb{R}^*$ pour essayer de revenir ensuite à $\mathbb{N}$.

Soit $N \in \mathbb{R}^*$. On veut décomposer N en k termes égaux tels que leur produit soit maximal. Chacun des termes est donc égal à $\frac{N}{k}$ et leur produit vaut $P(k) = \left(\frac{N}{k}\right)^k$.

On montre aisément, en dérivant, que ce produit est maximal lorsque $k = k_0 = \frac{N}{e}$ (e étant la base des logarithmes népériens). Mais k_0 n'a aucune raison d'être entier (on est même sûr qu'il ne l'est pas si N est entier) ! Si on prenait par exemple $N = 60$, on trouverait $k_0 \approx 22$: on pourrait alors penser qu'il faudrait 22 termes « le plus égaux possibles » ⁽¹⁾, alors que le théorème démontré précédemment prouve que le produit est maximal pour $k = \underline{20 \text{ termes}}$ (tous égaux à trois). On ne peut donc pas démontrer le théorème de la page précédente en procédant de cette façon...

On pourrait cependant vérifier que dans $\mathbb{R}$, la décomposition de 60 en 22 termes égaux à $30/11$ donnerait bien le produit maximal $P \approx 3\,855\,036\,819.44$, alors que dans $\mathbb{N}$ le produit maximal n'est que $3\,486\,764\,401$.



LES POLYEDRES

Pour tout savoir sur les polyèdres, allez sur :

<http://www.dma.ens.fr/culturemath/>

dossier "tout sur les polyèdres".