CRYPTOGRAPHIE

Dans le numéro 94 du Petit Vert, nous vous présentions un texte à décrypter. Voici la solution. Il s'agit des conceptions du mathématicien Alexis Clairaut (1713-1765) concernant l'enseignement de la géométrie.

Texte original

Quoique la Géométrie soit par elle même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les éléments ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes et de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur. Les propositions qui viennent ensuite, ne fixant point l'esprit sur des objets plus intéressants, et étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les commençants se fatiguent et se rebutent avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner.

Il est vrai que, pour sauver cette sécheresse naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques auteurs ont imaginé de mettre, à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage qu'on en peut faire pour la pratique ; mais par là ils prouvent l'utilité de la Géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre. Car chaque proposition venant toujours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir des idées abstraites.

Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la Géométrie m'ont fait espérer d'éviter ces inconvénients, en réunissant les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les commençants. J'ai pensé que cette science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés ; que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des commençants, puisque c'étaient des commençants qui les avaient faits.

Prévenu de cette idée, je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie ; et j'ai tâché d'en développer les principes par une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers inventeurs, observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire.

Quelques explications sur la façon dont a été codé le texte

Commençons tout d'abord par une statistique des lettres utilisées :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	
120	13	44	55	318	20	16	7	126	7	0	74	49	
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	*
116	76	55	34	104	142	131	96	33	0	5	4	1	35

Nombre total de caractères du texte : 1681.

On constate que cette répartition correspond bien à celle de la langue française usuelle : on fera l'hypothèse que les lettres n'ont pas été modifiées (le A représente bien un A, le B un B, etc. ; seul le « * » demeure un mystère, mais on peut supposer qu'il s'agit d'une ponctuation). Mais le nombre total de caractères utilisés, 1681, nous met la puce à l'oreille ; c'est le carré de 41. Rangeons donc le texte dans un tableau carré de 41 lignes et 41 colonnes.

La première colonne est la suivante (nous l'écrivons horizontalement pour des questions de mise ne page) :

QUOIQUELAGEOMETRIESOITPARELLEMEMEABSTRAIT

On devine une phrase écrite en français (la première du texte ci-dessus)... Nous sommes sur la bonne voie, il ne reste plus qu'à continuer, colonne par colonne, à reconstituer le texte. Reste à séparer les mots ; on constate au passage que les « * » correspondent aux points des fin de phrase (avec 16 « * » supplémentaires à la fin pour compléter le carré, car le texte original ne comportait que 1665 caractères, points compris.

Reprenons la façon dont a été codé le texte :

Première étape : suppression des caractères accentués, mise en majuscule du texte, remplacement des points par des * et suppression des autres caractères de ponctuation et des espaces.

Seconde étape : mise « au carré » : 41 lignes de 41 caractères (41 est le premier entier supérieur ou égal au nombre de caractères

Troisième étape : conversion du texte en tableau de 41×41 (la dernière ligne sera complétée par des *)

Quatrième étape : transposition du tableau (utilisation éventuelle d'un tableau)

Sixième transformation : conversion du nouveau tableau en texte, suppression des marques de fin de ligne (on n'obtient qu'un seul « bloc » de 1681 caractères).

Voilà. Vous pouvez vous amuser avec vos élèves (en prenant des textes plus courts, par exemple des théorèmes). Comme celui-ci :

DNGDUASDCAGLESLEONLELEAAUTSELHESRXEUREYSORASNECPT
MEU*TCAOEMST*RTRTGEDR*IAREADEE*ANENLESS*

Solution du problème n°94

Pour tout nombre entier, définissons $\tilde{n}$ comme étant l'entier obtenu en déplaçant à l'extrême gauche le chiffre des unités de n (dans l'écriture standard, en base 10). Par exemple : si $n = 7834$, alors $\tilde{n} = 4783$; si $n = 4500$, alors $\tilde{n} = 0450 = 450$.

Trouver un entier n ($n \geq 1$) tel que $7\tilde{n} = 2n$.

Merci à Jacques Choné, à Fabrice Laurent et à Isabelle Jacques pour leurs solutions.

Soit n un entier de $k+1$ chiffres. Posons $n = 10d + u$. Alors $\tilde{n} = 10^k \times u + d$. Résoudre $7\tilde{n} = 2n$ équivaut à résoudre $7 \times (10^k \times u + d) = 2 \times (10d + u)$, soit $(7 \times 10^k - 2)u = 13d$.

Comme 13 ne divise pas u , 13 divise $7 \times 10^k - 2$.

A l'aide de la calculatrice ou de son tableur préféré, on trouve que le plus petit k qui convienne est $k=5$, et on a alors $d = 53846 \times u$.

Pour $u=1$, on trouve $n=538461$, qui est la plus petite solution possible.

Fabrice Laurent montre que $u > 1$ ne donne pas de solutions, et les autres solutions (pour d'autres valeurs de k) sont toutes de la forme 538461538461 , 538461538461538461 , etc...

Jacques Choné signale qu'on a $\frac{7}{13} = 0,5\overline{38461}$ et que 538461 est

le quarantième nombre de Kaprekar : en effet, on a $5384612^2 = 289940248521$ et $289940 + 248521 = 538461$.

Etonnant, non ?

Problème n°95 (proposé par Loïc Terrier)

On lance un spaghetti de longueur d sur un sol carrelé, les carreaux étant des carrés de côté unité. Quelle est la probabilité que le spaghetti soit à l'intérieur d'un des carreaux ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou toute proposition de nouveau problème à : Loïc Terrier, 42B rue du maréchal Foch, 57130 Ars sur Moselle (ou loic.terrierATfree.fr).