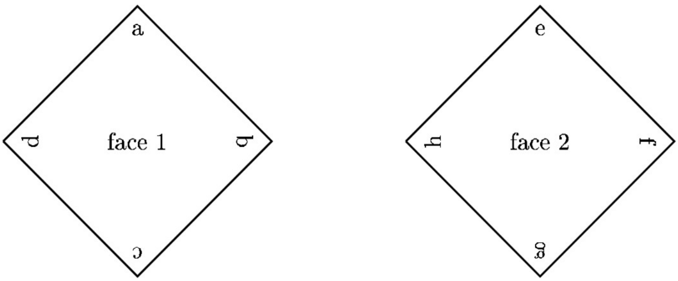
ETUDE MATHEMATIQUE

Petite présentation des graphes de Cayley

Loïc Terrier, lycée Loritz

Lors de la conférence inaugurale des journées de Besançon, Douglas Hofstadter nous a parlé de certains groupes, et de leurs graphes de Cayley ; ces derniers sont assez méconnus, peu enseignés.

Prenez un sous-bock carré : de combien de façons pouvez-vous le bouger tout en le laissant « globalement invariant » ? Il y a le quart de tour, dans un sens ou dans l'autre, le demi-tour, les renversements qui changent de face...
Considérez toutes ces transformations, ajoutez la transformation « identité » (celle qui consiste à ne rien faire), et vous obtenez un ensemble à huit éléments. Si *x* et *y* sont deux éléments de cet ensemble, on peut définir une loi * par : $x * y = y \circ x$ (on applique *x* puis *y*). Muni de cette loi, les huit éléments forment un **groupe** : on a $(x*y)*z = x*(y*z)$, l'identité est l'élément neutre, $x*y$ laisse encore le sous-bock globalement invariant et toute transformation admet une transformation inverse (celle qui remet le sous-bock dans sa position initiale).
La question qu'on se pose est : comment représenter ce groupe ?
Marquons les coins du sous-bock, sur chaque face :



On fixe une position de départ : le coin « a » visible, en haut (figure 1). On nomme chaque transformation du nom du coin visible en haut après la transformation (partant de la position de départ) : « a » sera donc l'identité, « b » sera le quart de tour dans le sens positif, « c » le demi-tour, etc...

Retour sommaire

Une première façon de représenter le groupe consiste à dresser sa table de multiplication :

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	c	d	a	h	e	f	g
c	c	d	a	b	g	h	e	f
d	d	a	b	c	f	g	h	e
e	e	f	g	h	a	b	c	d
f	f	g	h	e	d	a	b	c
g	g	h	e	f	c	d	a	b
h	h	e	f	g	b	c	d	a

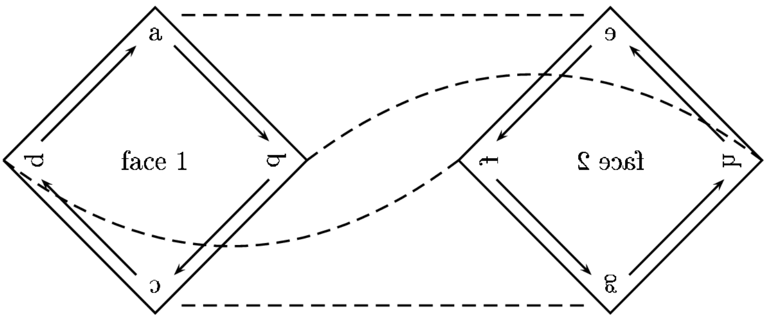
Cette table contient toute l'information sur le groupe, mais peut-on dire que c'est une bonne façon de le représenter ?

On peut lire sur cette table que le groupe n'est pas commutatif (on n'a pas en général $x*y=y*x$) et on observe deux blocs $\{a, b, c, d\}$ et $\{e, f, g, h\}$ qui correspondent aux deux faces du sous-bock.

En fait, il est facile de se convaincre que toutes les transformations peuvent s'obtenir à l'aide de b et e. Par exemple, on a $c=b*b$ et $h=e*b*b*b$ (que l'on notera $h=e*b^3$).

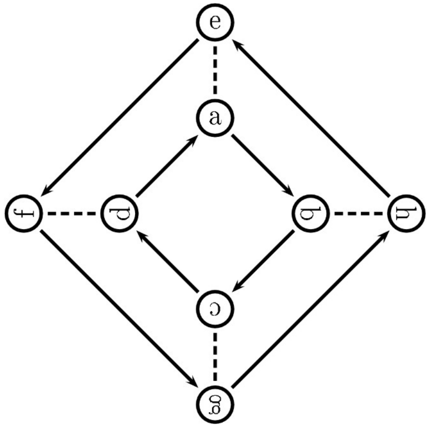
Les éléments b et e sont des générateurs du groupe. Remarquons que $b^4=a$, $e^2=a$ et $(b*e)^2=a$.

Sur le sous-bock, relions par une flèche les couples du type $(x, x*b)$, et par un trait en pointillé les couples du type $(x, x*e)$ (comme $e^2=a$, il est inutile de flécher).



On peut dessiner l'ensemble du graphe sur un plan, et on obtient alors le graphe ci-dessous :

Retour sommaire



Ce graphe est appelé « graphe de Cayley » du groupe.

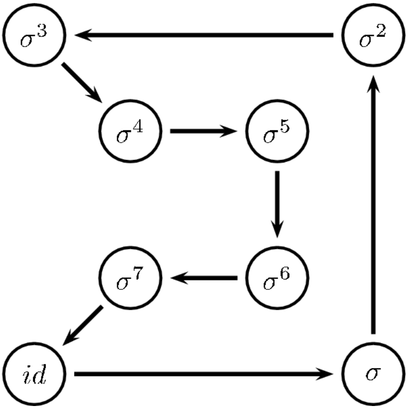
Ce groupe est le groupe diédral D_4, qui est obtenu comme produit semi-direct de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

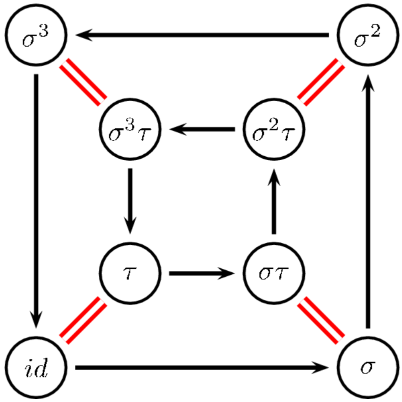
Un élément correspond à un trajet sur le graphe, en partant de l'identité (*a*) : *c*, par exemple, correspond au trajet obtenu en suivant deux fois la flèche. Pour *g*, c'est flèche, flèche, puis pointillés.
On retrouve facilement la table de multiplication : pour faire $g*c$, par exemple, on part de *g* et on suit le trajet associé à *c* : on obtient *e*.

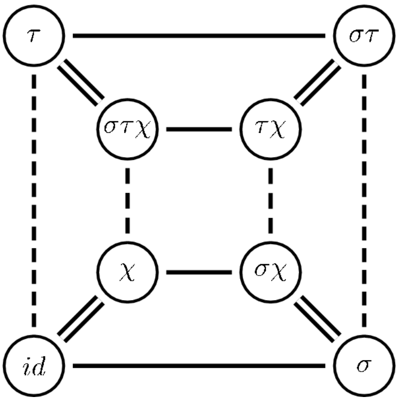
Pour déterminer l'ordre d'un élément, il suffit de suivre le trajet associé à cet élément, jusqu'à retomber sur l'identité.

Il existe (à isomorphisme près) cinq groupes à huit éléments : D_4, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}_2$ (groupe des quaternions). Voici le graphe de Cayley de trois d'entre eux : saurez-vous les identifier ?

Retour sommaire

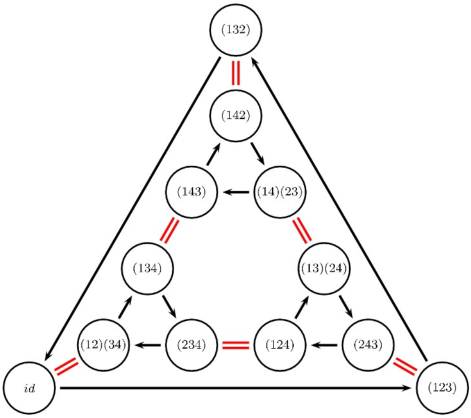


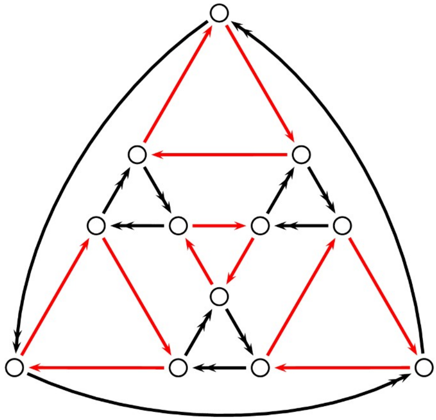




Pour terminer, remarquons qu'un groupe peut avoir plusieurs graphes de Cayley différents, selon le système de générateurs utilisé. Voici deux graphes possibles du groupe A_4 :

Retour sommaire





En guise de conclusion : le graphe de Cayley permet d'appréhender un groupe (discret), de le visualiser et d'en déduire un certain nombre de propriétés non triviales (et c'est beau, non ?)

Retour sommaire