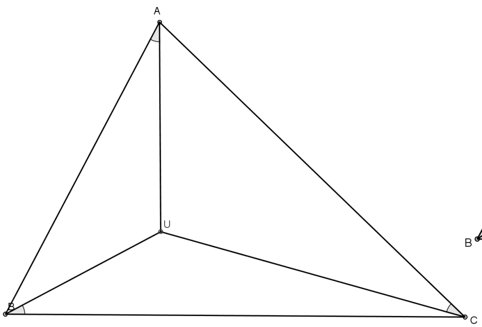
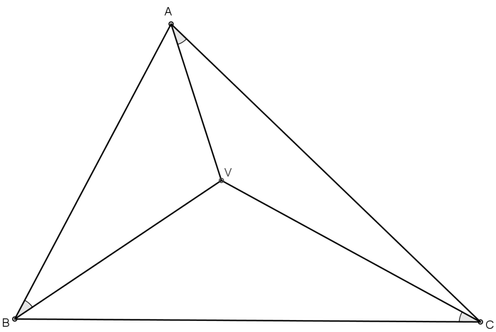
Pierre René Jean Baptiste Henri BROCARD

Henri Brocard (c'est son prénom usuel) est né le 12 mai 1845 à Vignot (près de Commercy), et meurt le 16 janvier 1922 à Bar-le-Duc. Il est enterré, avec ses parents, au petit cimetière de Vignot.
Il fait ses études secondaires à Marseille et à Strasbourg, puis intègre Polytechnique et rejoint le Génie ; la plus grande partie de sa carrière militaire a été consacrée à l'enseignement et la recherche en mathématiques.
Pendant la guerre de 1870, il est à Metz, affecté dans l'Armée du Rhin sous les ordres de Mac Mahon, puis à Sedan où il est fait prisonnier. Il part ensuite en Algérie (de 1874 à 1884), où il participera activement à l'animation de l'Association Française pour l'Avancement de la Science. C'est là qu'il présente un article « ***Étude d'un nouveau cercle du plan du triangle*** », appelé maintenant cercle de Brocard (voir ci-dessous).
Il rentre en France, prend sa retraite de lieutenant-colonel en 1910, et passe les dernières années de sa vie en solitaire à Bar-le-Duc : il était fils unique, sans famille proche, et ne s'était jamais marié. Cependant il continue à y avoir une activité mathématique, en tant que bibliothécaire de la *Société des Lettres, des Sciences et des Arts* barisienne, et assiste à de nombreux congrès internationaux. Il a été retrouvé mort dans son bureau le 16 janvier 1922.

Les points de Brocard du triangle

Les points de Brocard d'un triangle ABC sont les deux points U et V tels que les angles UAB, UBC, UCA d'une part, et VBA, VCB, VAC d'autre part soient égaux (les trois premiers sont d'ailleurs égaux aux trois suivants, leur valeur commune étant « **l'angle de Brocard du triangle** ») :

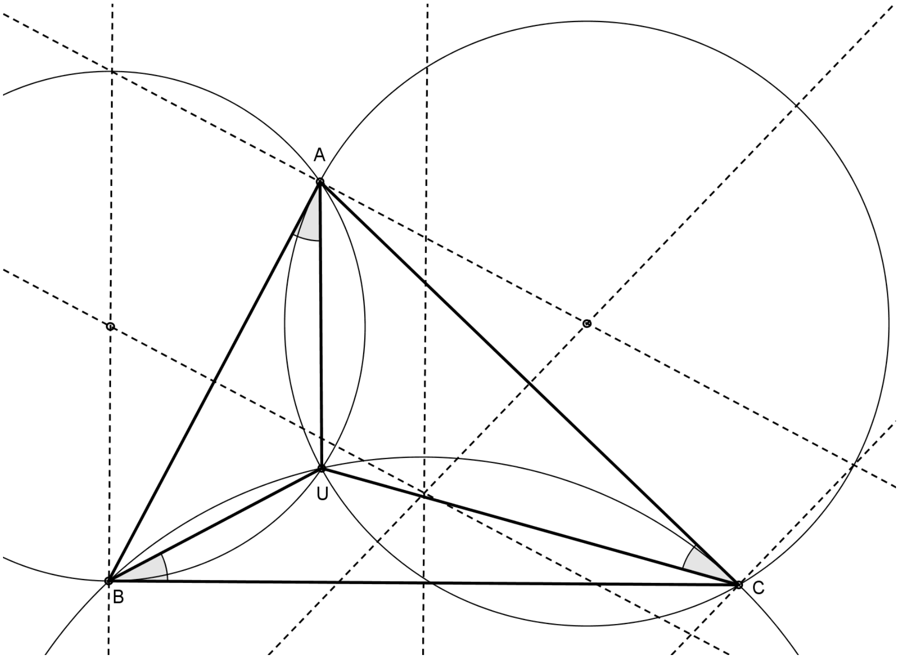




retour sommaire

Comment construire ces points ?

Pour le point U, on trace le cercle passant par A et C et tangent à (AB), le cercle passant par B et A et tangent à (BC) et le cercle tangent passant par C et B et tangent à (CA). Ces trois cercles concourent en U :



Pour le point V, on trace le cercle passant par A et C et tangent à (BC), etc. Ces constructions ne sont pas trop difficiles avec un logiciel de géométrie dynamique, et on pourra vérifier que les six angles sont égaux.

Voici un certain nombre de formules permettant de calculer l'angle de Brocard **ω** d'un triangle ABC, de côtés respectifs a, b, c, et d'aire S (pour des simplicités d'écriture, nous n'avons pas mis les chapeaux sur les angles) :

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$$

$$\tan\omega = \frac{\sin A \sin B \sin C}{1 + \cos A \cos B \cos C}$$

retour sommaire

$$\cot\omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

$$\sin\omega = \frac{2S}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

etc.

Le cercle de Brocard du triangle

Dans tout triangle, les deux points de Brocard U et V, le centre O du cercle circonscrit et le point L de Lemoine sont sur un même cercle, appelé cercle de Brocard du triangle (ces deux derniers points en sont d'ailleurs un diamètre).

Qu'est-ce que le **point de Lemoine** d'un triangle (Émile LEMOINE, mathématicien français, 1840-1912) ? C'est le point de concours des trois symédianes !

Dans un triangle ABC, soit (m_A) la médiane issue de A et (b_A) la bissectrice intérieure de l'angle A. La droite (s_A) symétrique de (m_A) par rapport à (b_A) est la symédiane issue de A. Les trois symédianes (s_A), (s_B) et (s_C) sont concourantes au point L.

On peut démontrer que les distances de ce point L aux trois côtés du triangle sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.

Par ailleurs, L est le barycentre du système pondéré :

$$\left\{\left(A, BC\right), \left(B, CA^2\right), \left(C, AB^2\right)\right\}.$$

Références :

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brocard.html
http://fr.wikipedia.org/wiki/Henri_Brocard
http://serge.mehl.free.fr/anx/cer_brocard.html
http://mathworld.wolfram.com/BrocardAngle.html
http://serge.mehl.free.fr/chrono/Lemoine.html
Pour aller plus loin (triangles de Brocard) :
http://mathworld.wolfram.com/FirstBrocardTriangle.html

N.d.l.r. : figures réalisées à l'aide du logiciel libre GeoGebra.