

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

Un énoncé innocent...

par Pol LE GALL

Considérons l'énoncé suivant, d'apparence anodine :

La population d'un pays était de 60 millions d'habitants le premier janvier 2006. Le taux de natalité en 2006 est de 13 pour mille et le taux de mortalité de 9 pour mille. Combien y a-t-il d'habitants dans le pays le 1^{er} janvier 2007 ? (On suppose qu'aucun habitant n'a émigré ni immigré).

Première interprétation

Une première approche de l'exercice serait sans doute la suivante :

Nombre de naissances (en millions d'habitants) : $\frac{60 \times 13}{1000} = 0,78$

Nombre de décès (en milliers d'habitants) : $\frac{60 \times 9}{1000} = 0,54$

Population au bout d'un an : $60 + 0,78 - 0,54 = 60,24$.

Il y a donc **60,24** millions d'habitants.

Deuxième interprétation

Supposons que les naissances aient toutes lieu au printemps et que les décès aient tous lieu à l'automne...

En ce cas la population serait en été de : $60 \times 1,013 = 60,78$.

Il faut ensuite appliquer le taux de mortalité à cette population, et on obtient : $60,78 \times 0,991 \approx 60,233$.

Il y aurait donc **60,233** millions d'habitants à la fin de l'année.

L'hypothèse des naissances qui précèdent les décès est évidemment absurde.

Cependant, supposons maintenant que les naissances aient toujours lieu le matin et les décès le soir. Chaque jour la population sera calculée par le produit de deux taux journaliers n et d tels que $n^{365} = 1,013$ et $d^{365} = 0,991$. Au bout de l'année, nous retrouverons les 60,233 millions d'habitants.

Le produit étant commutatif, si on suppose que certains jours les décès ont lieu le matin et les naissances le soir, cela ne change rien au résultat. Si on considère le taux horaire, ou par seconde, ou... cela ne change toujours rien.

Dès l'instant où les décès et les naissances de l'année ne sont pas simultanés, on est sur un modèle multiplicatif.

Troisième interprétation

Allons chercher sur le site de l'INSEE

http://www.insee.fr/fr/nom_def_met/definitions/html/accueil.htm ce que l'on appelle taux de natalité et taux de mortalité :

Le taux de natalité est le rapport du nombre de naissances vivantes de l'année à la population totale **moyenne** de l'année.

Le taux de mortalité est le rapport du nombre de décès de l'année à la population totale **moyenne** de l'année.

Soit P la population cherchée, N le nombre de naissances et D le nombre de décès (exprimés en millions d'habitants) on aurait donc :

$$\begin{cases} N = 0,013 \times P_{\text{moy}} \\ D = 0,009 \times P_{\text{moy}} \\ 60 + N - D = P \end{cases}$$

Une nouvelle question se pose : qu'appelle-t-on « population moyenne » ?

Si nous considérons qu'il s'agit (c'est ainsi que l'INSEE doit procéder) de la moyenne arithmétique entre la population au début et à la fin de l'année, on a :

$$P_{\text{moy}} = \frac{60 + P}{2}, \text{ donc } N = \frac{P + 60}{2} \times 0,013 \text{ et } D = \frac{P + 60}{2} \times 0,009, \text{ d'où}$$

$$P = \frac{P + 60}{2} \times 0,004 + 60$$

$$\text{donc } P = 60 \times \frac{1,002}{0,998} \approx 60,240481.$$

Quatrième interprétation

La croissance de la population est certainement exponentielle. On a donc une relation du type : $P(x) = 60(1 + a)^x$, où x désigne le temps, exprimé en années.

On cherche $P(1)$.

La valeur moyenne de la population au cours de l'année est donc :

$$\int_0^1 P(x) dx = \int_0^1 60(1 + a)^x dx.$$

Le calcul de l'intégrale nous donne : $P_{moy} = \frac{60a}{\ln(1 + a)}.$

$$\text{Or les relations } \begin{cases} N = 0,013 \times P_{moy} \\ D = 0,009 \times P_{moy} \\ 60 + N - D = P \end{cases} \text{ restent vraies.}$$

Donc $60 + 0,004 \frac{60a}{\ln(1 + a)} = 60(1 + a)$, d'où $a = e^{0,004} - 1$, et on a donc :

$$P = 60 \times 0,004 \approx 60,240481.$$

On trouve le même résultat qu'auparavant, il faudrait encore une décimale pour départager les deux calculs.

Cette proximité de résultats s'explique :

$$\frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} - e^x \text{ est équivalent à } \frac{x^3}{12} \text{ au voisinage de } 0.$$