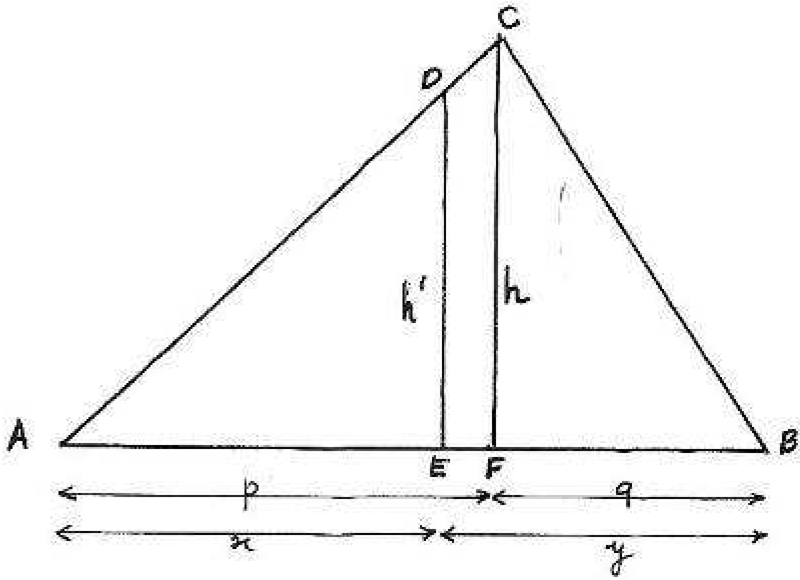
Théorème de FISHMONGER-IKHTYOS :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2(a+b)}$$

Démonstration :

Soit un triangle ABC, et h la hauteur CF issue de C. Soit AF = p et FB = q :



On considère le segment [ED] parallèle à [FC] qui partage le triangle ABC en deux parties de même aire.
Soit DE = h' , AE = x et EB = y.

On a aire(ABC) = 2×aire(AED), ce qui peut s'écrire : $\frac{1}{2}(p+q)h = 2\times\frac{1}{2}xh' = xh'$ [*].

Mais le triangle AED est semblable au triangle AFC. D'où : $\frac{h'}{h}=\frac{x}{p}$, d'où $h'=h\times\frac{x}{p}$.

En reportant dans [*], il vient $\frac{1}{2}(p+q)h=\frac{x^2h}{p}$, d'où l'on tire $x=\sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}$.

Or y joue par rapport à q le même rôle que x par rapport à p, d'où, de la même manière : $y=\sqrt{\frac{q(q+p)}{2}}$.

En additionnant les deux résultats précédents, il vient :

$x+y=\sqrt{\dfrac{p(p+q)}{2}}+\sqrt{\dfrac{q(q+p)}{2}}$.

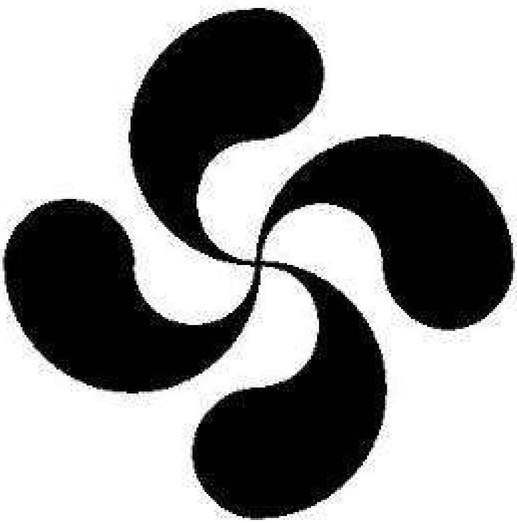
Or $x + y = p + q$ d'où : $p+q=\sqrt{\dfrac{p(p+q)}{2}}+\sqrt{\dfrac{q(q+p)}{2}}=\sqrt{p+q}\left(\sqrt{\dfrac{p}{2}}+\sqrt{\dfrac{q}{2}}\right)$.

En divisant les deux membres par $\sqrt{p+q}$ on obtient : $\sqrt{p+q}=\sqrt{\dfrac{p}{2}}+\sqrt{\dfrac{q}{2}}$

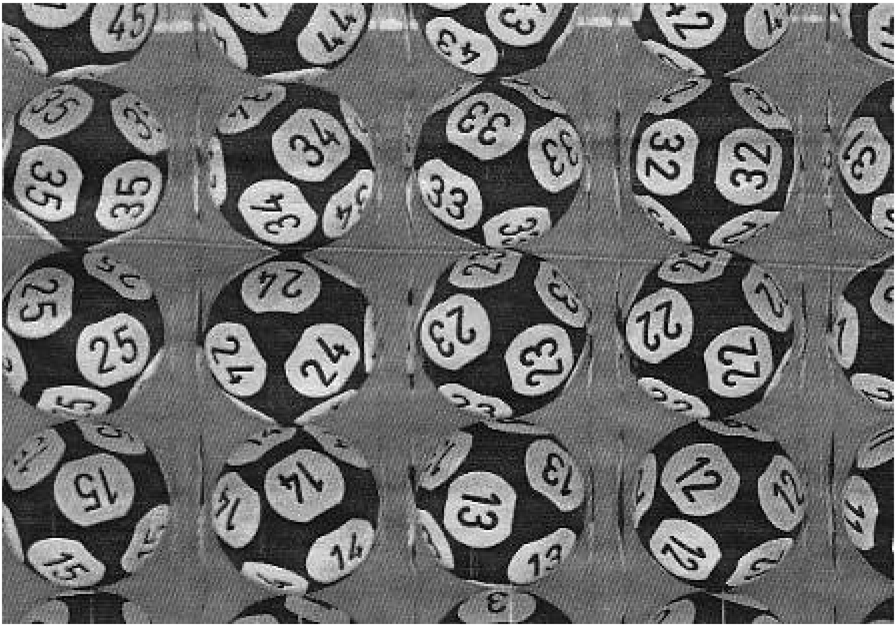
Il ne reste plus qu'à poser $p = 2a$ et $q = 2b$ pour obtenir : $\sqrt{2a+2b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Et le théorème est démontré :

$$\boxed{\sqrt{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}=\sqrt{\boldsymbol{a}}+\sqrt{\boldsymbol{b}}}\ .$$



LE LOTO ET LE LILLIPUTOTO



Dans le numéro 32 du Petit Vert (décembre 1992) nous vous présentions une publicité pour un appareil qui vous permettait de “ fabriquer ” 22 grilles simples de loto différentes, vous garantissant que vous étiez alors sûrs de gagner. Nous vous demandions si cette publicité était mensongère ou pas. Autrement dit, est-il possible, en remplissant seulement 22 grilles (judicieusement choisies !), d’être sûr qu’au moins une d’entre elles soit gagnante, et ce quel que soit le tirage ?
Aucun lecteur n’avait répondu à ce problème, qui reste donc “ ouvert ” depuis plus de 13 ans…

Rappelons à ceux qui ne le connaissent pas le mode de fonctionnement du Loto. On dispose d’une grille de 49 numéros (de 1 à 49), et l’on en choisit 6 que l’on coche. Ensuite, l’organisateur procède à un tirage de 6 boules, plus une boule dite “ complémentaire ”. Pour gagner, il suffit qu’au moins trois de vos numéros cochés soient sur la liste des 6 tirés.
Le règlement est en réalité un peu plus compliqué que cela, car il y a plusieurs “ types ” de gagnants : on gagne “ le gros lot ” si on a coché les 6 numéros sortis (la probabilité est de 1/13 983 816) ; mais on gagne aussi si l’on a 5 bons numéros et le complémentaire, 5 bons numéros, 4 bons numéros et le complémentaire, 4 bons numéros, 3 bons numéros et le complémentaire, ou tout simplement 3 bons numéros.

Le coût actuel d'une grille est de 0,30 €, mais on ne doit jouer au minimum 2 grilles pour les 2 tirages du même soir, soit 1,20 € de mise minimale.
La probabilité de gain est calculable (ce n'est qu'un problème de combinatoire : sur les 13 983 816 grilles constructibles, 260 624 sont gagnantes [voir en annexe], soit pas même 2 chances sur 100 de gagner quelque chose). Par contre l'espérance de gain n'est pas calculable : car le gain de chaque gagnant dépend du nombre de joueurs qui ont rempli des grilles gagnantes (autrement dit, si vous avez coché les bons numéros, espérez que personne n'ait eu la même idée que vous, il vous faudrait partager avec eux !)

Pour mieux comprendre ce problème, que je n'étais pas arrivé à résoudre à l'époque, je suis allé à Lilliput qui, comme vous le savez, est un tout petit pays où les grilles de loto (qui s'appelle là-bas le Lilliputoto) n'ont que 10 numéros, et vous devez en cocher 5. Il y a cinq boules tirées sur les 10 que contient l'urne, et vous gagnez si vous en avez au moins trois de bonnes.
Il y a donc C(10,5) = 252 tirages possibles (et donc 252 grilles 'potentielles' à remplir). Avec un peu de courage, on peut les lister. Et dans ce pays, il suffit donc de remplir deux grilles pour être sûr de gagner. En effet, et vous pouvez le vérifier aisément, si vous cochez d'une part la grille 1-2-3-4-5 et d'autre part la grille 6-7-8-9-10 (ou tout autre couple de grilles dont les numéros s'excluent mutuellement), vous êtes sûr d'avoir au moins trois bons numéros : la première grille vous donnera accès à 126 des 252 issues possibles, et la seconde grille aux 126 autres.

Revenons maintenant en France : est-il possible qu'avec seulement 22 grilles on soit sûr de gagner au Loto ; et si oui, y a-t-il une méthode pour remplir ces grilles ?

Jacques VERDIER

ANNEXE

Probabilités :

Pour des raisons d'utilisation du traitement de texte, on notera *C*(n,p) le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n.
Le nombre total de grilles " faisables " est bien sûr *C*(49,6) = 13 983 816.
Parmi ces grilles il y en a *C*(6,6) = 1 (une) qui correspond aux 6 numéros sortis,
il y en a *C*(6,5)*1 = 6 qui correspondent à 5 numéros plus le complémentaire,
il y en a *C*(6,5)**C*(42,1) = 252 qui correspondent à 5 numéros,
il y en a *C*(6,4)*1**C*(42,1) = 630 qui correspondent à 4 numéros plus le complémentaire,
il y en a *C*(6,4)**C*(42,2) = 12 915 qui correspondent à 4 numéros,

il y en a $C(6,3)*1*C(42,2) = 17\ 220$ qui correspondent à 3 numéros + le complémentaire,
et il y en a $C(6,3)*C(42,3) = 229\ 600$ qui correspondent à 3 numéros seulement.
Soit au total 260 624 grilles gagnantes ; soit une probabilité de 4654/249711.

Statistique des gains :

Sur les 42 tirages effectués entre le 03/12/2005 et le 11/02/2006 inclus, les moyennes des gains ont été les suivants (rappelons que la valeur du gain n'est pas calculable à l'avance, elle dépend du nombre de gagnants) :
Pour les 6 bons numéros : 1 214 263 € en moyenne (mais, sur ces 42 tirages, il y a eu 11 fois 0 € de gain parce que personne n'avait coché les six bons numéros ; il y a aussi eu des tirages " spéciaux " : par exemple 7 000 000 € pour l'unique gagnant du 24 décembre au soir) ;
pour 5 bons numéros + le complémentaire : en moyenne 16 197 € ;
pour 5 bons numéros : 1 017 € ;
pour 4 bons numéros + le complémentaire : 44,25 € ;
pour 4 bons numéros : 22,12 € ;
pour 3 bons numéros + le complémentaire : 5,58 € ;
pour 3 bons numéros : 2,79 €.
Compte tenu des probabilités calculées à partir des combinaisons ci-dessus, l'espérance moyenne de gain calculée sur cette période a été de 0,187 € (pour 0,30 € de mise), c'est à dire un peu plus de 60 % de " redistribution ".

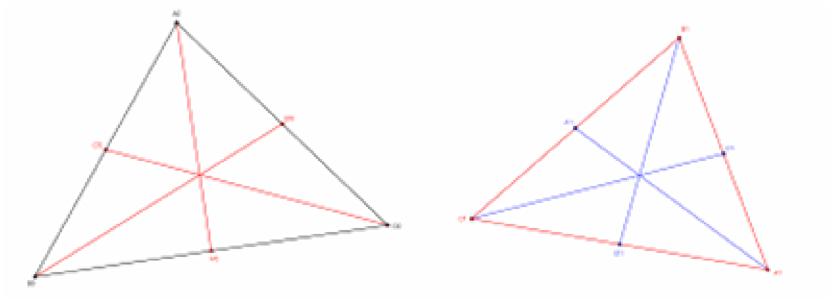
Grilles multiples :

Tous les exemples donnés concernent les grilles " simples " ; il existe aussi des grilles " multiples " : par exemple, si vous cochez 7 numéros (mettons 1-2-3-4-5-6-7), c'est comme si vous aviez " fabriqué " 7 grilles distinctes (1-2-3-4-5-6, 1-2-3-4-5-7, 1-2-3-4-6-7, 1-2-3-5-6-7, 1-2-4-5-6-7, 1-3-4-5-6-7 et 2-3-4-5-6-7) , si vous en cochez 8 c'est comme si vous aviez fabriqué 28 grilles, 84 grilles si vous en cochez 9 ; mais le prix que vous payez pour une grille multiple à 9 numéros vaut exactement le prix de 84 grilles simples. Ce qui ne change donc absolument rien à tous les calculs précédents.

Solution du problème n°84

Rappel de l'énoncé :

Soit $A_0B_0C_0$ un triangle. On trace ses médianes.
Si cela est possible, on construit un triangle $A_1B_1C_1$ dont les côtés ont pour longueurs les longueurs des segments $[A_0A'_0]$, $[B_0B'_0]$, $[C_0C'_0]$.



Et ainsi de suite… On trace à l'étape n les médianes du triangle $A_nB_nC_n$ et on construit un nouveau triangle $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ dont les côtés ont pour longueurs celles des médianes du triangle $A_nB_nC_n$.

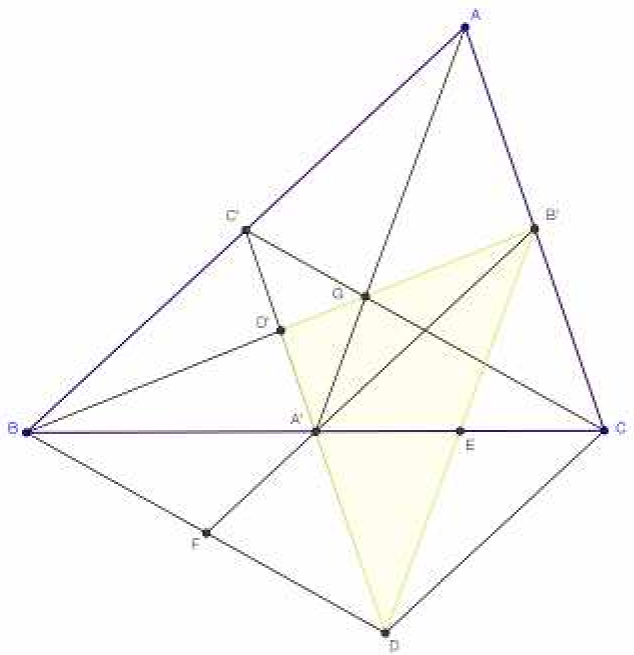
Que peut-on dire de la suite de triangles ainsi définie ?

Solutions de Jacques CHONÉ, Loïc TERRIER, Christophe BRIGHI, Denis PÉPIN, Jean-Yves ECKER.

Ci-dessous la solution, purement géométrique, de Jean-Yves ECKER :

Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB], soit G le centre de gravité. Construisons D tel que AA'DB' soit un parallélogramme.
Montrons que BDB' est un triangle dont les côtés ont pour longueur les longueurs AA', BB' et CC' :

[BB'] est un côté de BDB'.
B'D=AA' car AA'DB' est un parallélogramme.
C'A'=(1/2)AC=AB' et (C'A')//(AB') car C' et A' sont les milieux de [AB] et de [BC].
On a aussi : A'D=AB' et (A'D)//(AB') car AA'DB' est un parallélogramme.
Donc (C'A')//(A'D), ce qui implique que C', A' et D sont alignés et que C'A=A'D.
Donc A' est le milieu de [C'D].
Comme A' est le milieu de [BC], CC'BD est un parallélogramme.
Donc CC'=BD.



Montrons que A' est le centre de gravité de BDB' :

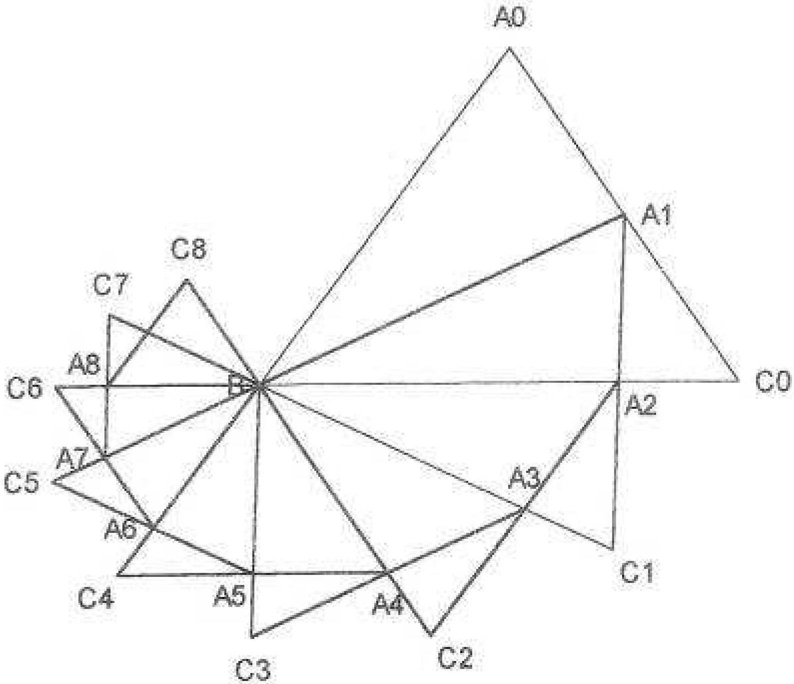
B’A’DC est un parallélogramme car (A'D)//(B'C) et A'D=(1/2)AC=B'C, donc [A’C] et [B'D] ont le même milieu.
Donc (BC) est la médiane de BDB' passant par B.
De plus B'C'BA' est un parallélogramme (démonstration analogue) et de même (AM) est la médiane de BDB' passant par D.

Calculons la « longueur des médianes » de BDB' :

BE=BA+AE=(l /2)BC+(1/2)A'C=(l /2)BC+(1/4)BC=(3/4)AC car A'est le milieu de [BC] et E celui de [A'C].
DD'=DA'+A'D'=(1/2)AC+(1/2)A'C'=(1/2)AC+(1/4)AC=(3/4)AC car DA'=AB'=(l /2)AC et D' milieu de [A’C’] et A'C'=(l /2)AC.
BF'=(3/2)B'A'=(3/4)AB car A' est le centre de gravité de BB'D et B'A'=(1/2)AB.

Donc la suite des triangles ($A_nB_nC_n$) vérifie la propriété :
$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}$ est un triangle semblable à $A_nB_nC_n$ avec un rapport de 3/4.
Les suites extraites de rangs pair et impair sont donc constituées chacune de triangles semblables de plus en plus petits.

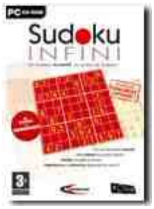
Si on poursuit la construction suivant le procédé ci-dessus, en gardant le point B fixe, on obtient la « spirale » :



Problème du trimestre n°85

Problème proposé par François PÉTIARD, de Besançon

Vu dans la presse (et sur le Web) une publicité pour un logiciel permettant de créer une infinité de grilles de sudoku (éditeur : Mindscape, coût : 9,99 €) :



« Sudoku infini, c'est un CD permettant de créer un nombre illimité de grilles de Sudoku »

« Infini », « illimité »… cela nous paraît peut-être exagéré !
Mais au fait, combien existe-t-il de grilles de Sudoku, à l'exemple de celle ci-dessous, remplies et différentes ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à :
Loïc TERIER, 42B rue du Maréchal Foch, 57130 ARS / MOSELLE