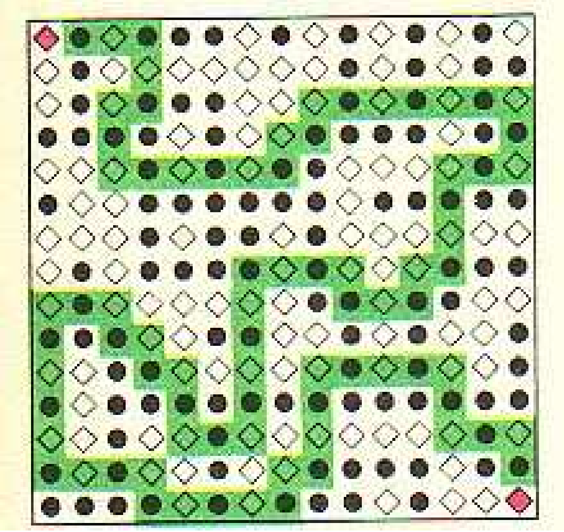
La rédaction du Petit Vert et le Comité de la Régionale vous souhaitent à tous une excellente fin d'année, de joyeuses fêtes et une heureuse année 2006.

## Solution du labyrinthe n°83

En couverture du mois de septembre, nous vous proposions de traverser un échiquier, en alternant ronds noirs et carrés blancs au sein de déplacements horizontaux ou verticaux.



## Solution du problème du trimestre n°83

Une compagnie internationale possède 70 employés. Si X et Y sont deux quelconques d'entre eux, il y a au moins une langue parlée par X et non par Y et une au moins une langue parlée par Y et non par X.
Quel est le nombre minimum de langues parlées par les employés ?

Une seule solution nous est parvenue, celle de Jacques CHONÉ.

Nous allons montrer que le nombre *n* demandé est 8.

Soit L l'ensemble des langues parlées par les employés. Appelons antichaîne de L (ou système de Sperner de L)[1] toute famille de parties de L telle que, si A et B sont deux quelconques d'entre elles, on ait A non inclus dans B et B non inclus dans A.

Le problème revient à trouver la plus petite valeur, *n*, du cardinal d'un ensemble L possédant une antichaîne comportant 70 parties de L.

**1 )** Si card L = 8, les 70 (nombres de combinaisons de 4 parmi 8) parties avant 4 éléments de L forment une antichaîne de L (car étant données deux 4-parties distinctes de L si 1'une d'entre elles était incluse dans l'autre, elles seraient égales). Donc *n* est inférieur ou égal à 8

**2 )** Supposons que card L = 7 et soit $B_1$, $B_2$, … $B_t$ une antichaîne quelconque de L (on notera $b_i$ =card $B_i$).
Appelons chaîne maximale de L une famille $A_0$, $A_1$, ... $A_7$ de parties de L telles que card $A_i = i$ ($i$ élément de [[0, 7]]) et $A_i$ inclus dans $A_{i+1}$ ($i$ élément de [[0, 6]]). Il y a bijection entre les chaînes maximales de L et les permutations de L (car toute permutation ($x_1$, $x_2$, … $x_7$) de L correspond à l'unique chaîne maximale $\varnothing \subset \{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset ... \subset \{x_1, x_2, ...x_7\} = L$ et vice versa).
Le nombre de chaînes maximales de L est donc 7!. Or une chaîne maximale ne peut contenir plus d'un $B_i$ et il y a $b_i$! manières de former une chaîne de $\varnothing$ à $B_i$ avec chacune desquelles il a $(7 - b_i)!$ manières de compléter cette chaîne pour en faire une chaîne maximale.

On en déduit l'inégalité : $\sum_{i=1}^{t} b_i! \cdot (7 - b_i)! \leq 7!$, c'est-à-dire que pour tout $b_i$ on a $\binom{7}{b_i} \leq \binom{7}{3} = 35$.

D'où $\frac{t}{\binom{7}{3}} = \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{\binom{7}{3}} \leq \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{\binom{7}{b_i}} \leq 1$.

D'où *t* est inférieur ou égal à 35. Donc le nombre maximum d'éléments d'une antichaîne de L est 35. Donc $7 < n$.

**3 )** On a ainsi montré que n = 8 .

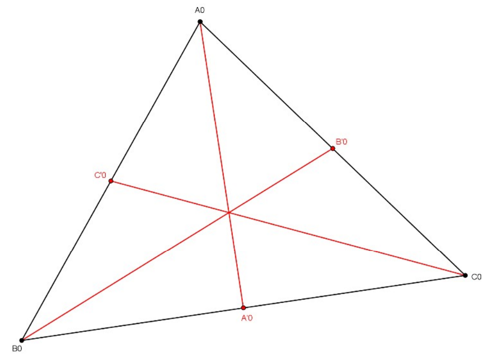
<u>Remarque</u> : l'étude qui précède est, sur un cas numérique, la démonstration du théorème de Sperner que l'on peut trouver sur http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pigeonhole.shtml ou dans Louis COMTET, Analyse Combinatoire, tome second, pages 114-116 (PUF 1970).

[1] Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Famille_De_Sperner

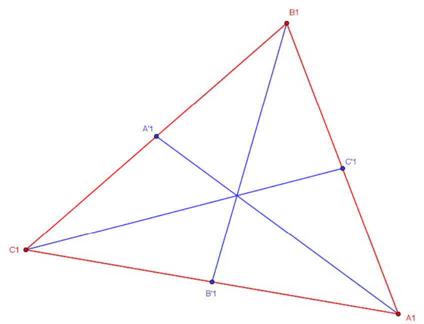
# Problème du trimestre n° 84

Proposé par Pol LE GALL

Soit $A_0B_0C_0$ un triangle. On trace ses médianes.




Si cela est possible, on construit un triangle $A_1B_1C_1$ dont les côtés ont pour longueurs les longueurs des segments $[A_0A'_0]$, $[B_0B'_0]$, $[C_0C'_0]$.




Et ainsi de suite… On trace à l'étape n les médianes du triangle $A_nB_nC_n$ et on construit un nouveau triangle $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ dont les côtés ont pour longueurs celles des médianes du triangle $A_nB_nC_n$.

Que peut-on dire de la suite de triangles ainsi définie ?

*Envoyer le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57350-COURSELLES*