Questions de Fathi DRISSI (Petit Vert n° 81page 30) :
1. Avec le compas seul, est-il possible de construire le centre de gravité du triangle équilatéral IJK ?
2. Avec le compas seul, est-il possible de construire le point M sur le segment [AB] tel que AM=AB/3 ?

Réponse proposée par Bernard PARZYSZ :
Dans un ouvrage qu'il a chance de posséder (***Géométrie du compas*** par L. Mascheroni, traduite de l'italien par A.-M. Carette, officier supérieur du génie ; seconde édition à Paris chez Bachelier, 1828), on trouve (dans le livre troisième) les trois constructions suivantes :

N° 64, doubler la distance AB (c'est-à-dire construire le symétrique d'un point par rapport à un autre) :
“ Du centre A, et d'un rayon AB, décrivez une demi-circonférence BCDE ; c'est-à-dire, faites AB = BC = CD = DE : la ligne BAE sera droite et double de AB ”.

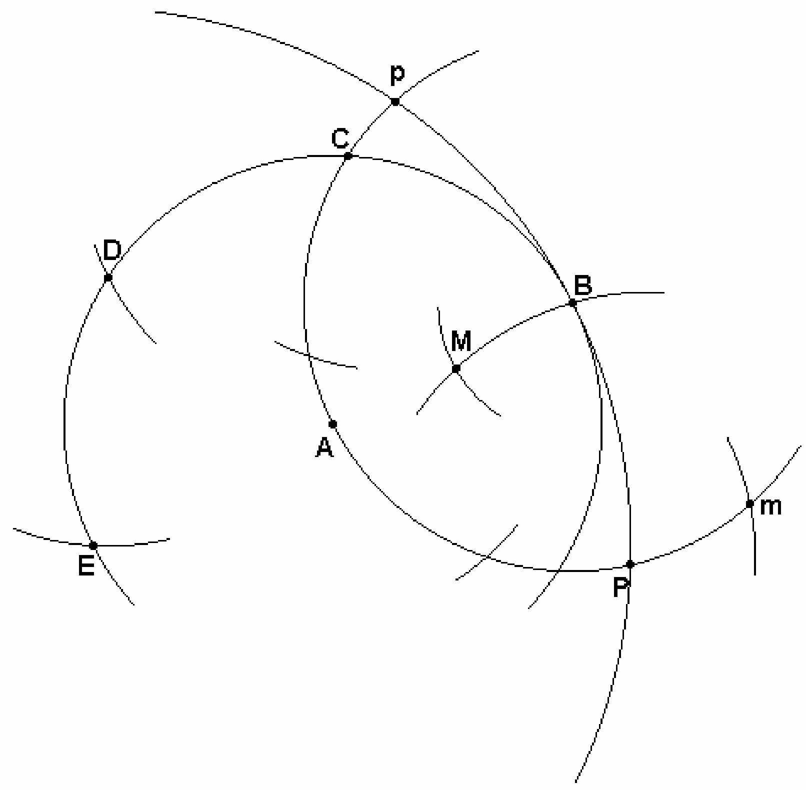
N° 66, partager en deux parties égales la distance AB (c'est-à-dire trouver le point M qui soit au milieu du segment AB) :
“ Après avoir décrit la demi-circonférence BCDE (n° 64), du centre E et d'un rayon EB soit décrit un arc indéfini PBp ; du centre B et d'un rayon BA, soit encore décrite la demi-circonférence pAPm ; ensuite, du centre P et du rayon PB, soit décrit l'arc BM, et qu'on fasse Pm = BM ; le point M sera le point cherché ”.

N° 68, diviser la distance AB en trois parties égales :
“ Qu'on ajoute en ligne droite de part et d'autre à AB les deux distances AE, BV qui lui sont égales (n° 64) ; des centres E et V et du rayon EV soient décrits les deux arcs indéfinis QVq, PEp ; des mêmes centres E et V et du rayon EB soient décrits deux autres arcs qui coupent les premiers en Q, q, et P, p ; avec ce même rayon EB, et des centres P et p, soient décrits deux arcs qui se coupent en T ; enfin, avec le même rayon et des centres Q, q soient décrits deux arcs qui se coupent en t, la ligne AB sera divisée en trois parties égales aux deux points T et t ”. *(suit la démonstration de la validité de cette construction, qui fait intervenir des triangles semblables).*

Le problème n° 68 fournit la réponse à la deuxième question.
Associé à la construction n° 66, cette réponse à la seconde question fournit ipso facto la réponse à la première question.

Nous vous proposons ci-dessous les constructions n°64 et n°66.

Construction, au compas seul, du symétrique de B par rapport à A puis du milieu de [AB].



En s'inspirant de la construction de Mascheroni, comment construire ce même point M en traçant seulement 7 cercles ?

« En sciences, ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration. »
Richard Dedekind (1831-1916), mathématicien allemand.

Solution du problème du trimestre n°81

Tout d'abord un retour sur le n°80 :

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts de la courbe d'équation : $y=x^3$.
Montrer l'équivalence entre :
A, B et C sont alignés ;
L'isobarycentre de A, B et C est sur l'axe des ordonnées.

Patrick Gozillon propose une solution très rapide : « Les 3 points sont alignés équivaut à dire que leurs abscisses sont les solutions distinctes d'une équation du 3° degré du type $x^3 = ax + b$ ou encore les racines d'un polynôme du type $x^3 – ax - b$ dont la somme des racines doit évidemment être nulle (relation coefficient-racines; coefficient de x^2 nul!) ».

Solution du problème 81

> **Chasse au lapin sur le tore !**
> On considère un tore muni d'un quadrillage de 15 cases (3 fois 5).
> Un lapin déguste une carotte sur l'une des cases. Absorbé par son repas, il ne bouge pas de cette case.
> Un chasseur parcourt le tore de manière aléatoire : à chaque étape, il passe équiprobablement d'une case à l'une des quatre cases adjacentes.
> Lorsqu'il arrive sur la case où se trouve le lapin, il tue ce dernier.
> Quelle est l'espérance de vie (exprimée en étapes) du lapin ?

Jacques Choné, Joël Kieffer, Jérôme Cardot, Renaud Dehaye, Olivier Léomold et l'auteur du problème, Loïc Terrier, ont envoyé des solutions.
La plupart d'entre elles reposent sur le même principe : le tore est représenté par un tableau de dimensions 3 et 5, le lapin déjeûnant dans la case centrale. On utilise ensuite la symétrie du tableau pour définir 5 positions de départ.

E	D	E
C	B	C
A	lapin en sursis	A
C	B	C
E	D	E

Considérons ce qui se passe si le chasseur est dans une case A : il y a une chance sur 4 qu'il tue le lapin au déplacement suivant, une chance sur 4 qu'il rejoigne l'autre case A, et une chance sur 2 qu'il rejoigne une case C.
On en déduit que l'espérance E_A de vie du lapin, si le chasseur part de A, vérifie l'équation : $E_A= 1+(1/4)E_A+(1/2)E_C$.
En appliquant le même raisonnement aux quatre autres positions de départ, on a le système d'équations :

$$\left|\begin{array}{l} E_A= 1+(1/4)E_A+(1/2)E_C \\ E_B= 1+(1/4)E_D+(1/2)E_C \\ E_C= (1/4)E_A+(1/4)E_B +(1/4)E_C +(1/4)E_E \\ E_D= (1/4)E_B +(1/4)E_D +(1/2)E_E \\ E_E= (1/4)E_C +(1/4)E_D +(1/2)E_E \end{array}\right.$$

dont la solution est : $E_A = \dfrac{380}{29}$, $E_B = \dfrac{432}{29}$, $E_C = \dfrac{512}{29}$, $E_D = \dfrac{588}{29}$ et $E_E = \dfrac{608}{29}$

Le chasseur a 2 chances sur 15 d'être dans une case A au départ, 2 chances sur 15 d'être dans une case B, 4 chances sur 15 d'être dans une case C, 2 chances sur 15 d'être dans une case D et 4 chances sur 15 d'être dans une case E. O en déduit l'espérance de vie du lapin :

$$\frac{2}{15}.\frac{380}{29}+\frac{2}{15}.\frac{432}{29}+\frac{4}{15}.\frac{512}{29}+\frac{2}{15}.\frac{588}{29}+\frac{4}{15}.\frac{608}{29}=\frac{1456}{87}$$ soit environ 16,74.

Le lapin aura donc sans doute le temps de finir sa carotte !

Comme toujours, les rédacteurs de solutions ont été explorer un peu plus loin…
Jérôme Cardot et Joël Kieffer proposent une approche matricielle à partir d'une interprétation du problème en termes de graphes. Jérôme Cardot calcule ainsi la probabilité de survie du lapin après k déplacements : il faut attendre le dixième déplacement pour que celle-ci descende en dessous de 0,5.
Jacques Choné propose un programme en Mathematica « simulant la promenade du chasseur sur un réseau torique de n colonnes et m lignes en partant de la colonne en partant de la case de la colonne i_0, ligne j_0, le lapin étant sur la case (0,0) (les lignes sont numérotées de 0 à m-1 et les colonnes de 0 à n-1) et qui renvoie le nombre d'étapes nécessaire pour attraper le lapin :

```
p[n_, m_, i0_, j0_] :=
  Block[{r = 0, i = i0, j = j0, a},
    While[Mod[i, n] != 0 || Mod[j, m] != 0, a = Random[Integer, {1, 4}];
      r++;
     Which[a == 1, i = Mod[i - 1, n], a == 2, i = Mod[i + 1, n], a == 3,
       j = Mod[j - 1, m], a == 4, j = Mod[j + 1, m]]]; r]
```

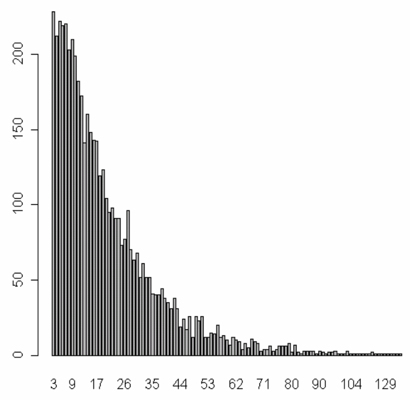
Loïc Terrier envisage l'hypothèse où le chasseur ne serait pas équitablement attiré par les quatre directions, où les probabilités d'aller vers le haut, le bas, la gauche, la droite (si tant est que ces termes signifient quelque chose sur le tore) seraient des nombres fixes mais différents. Il cherche alors à les calculer pour réduire l'espérance de vie du lapin. Heureusement pour ce dernier, Loïc ne mène pas la résolution jusqu'à son terme ! Il parvient toutefois à trouver quatre nombres pour lesquels l'espérance serait environ de 11.

Joël Kieffer ne propose pas moins de six solutions au problème, exploitant tour à tour les logiciels MAPLE et R, les chaînes de Markov…
Il propose aussi un angle d'attaque original, toujours avec R :

« En vue d'une solution théorique, il est intéressant de représenter chaque point du tore par un nombre de 0 à 14 ; en termes savants d'établir une bijection de $Z_3 \times Z_5$ sur Z_{15} .
A tout entier n , on fait correspondre le couple (a= n mod 3,b= n mod 5).
Réciproquement :
Il faut résoudre le système $n \equiv a \bmod(3)$ et $n \equiv b \bmod(5)$.
Il est facile de voir que n = 6b + 10a mod (15) est la solution cherchée
Les déplacements (1,0) , (-1,0) , (0,1) , (0,-1) correspondent à une addition de 10 , 5 , 6 , 9 dans le nouveau modèle .Reprenons les simulations dans ce nouveau contexte :

```
>a=c(5,6,9,10)
>test=function(depart,n){list=c();for(i in 1:n)
{u=0;z=depart;while(z!=0)
    {z=(z+sample(a,1))%%15;u=u+1};list=c(list,u)};
                    t=table(list);barplot(t);c(mean(list),sd(list))}
> test(2,5000)
[1] 20.59280 17.66742
```

la fonction ci dessus enregistre la liste des durées de n marches , issues de depart pris entre 1 et 14 ; elle renvoie moyenne et écart type, mais donne également une idée de la loi suivie par la durée de la marche aléatoire, grâce à une représentation graphique. ».



Problème du trimestre n°82

proposé par…à vous chers lecteurs de trouver son origine.

Un triangle inscrit dans un cercle de rayon r = 10 a ses hauteurs proportionnelles à 2, 3 et 4.
Calculer les angles et un côté.

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème à :
Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES

a comme association amie
b comme bonne bière belge
c comme convivialité
d comme deux mille cinq

Les 23, 24 et 25 Août a lieu à Tournai le congrès de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française. Le thème est "tous nos enfants font des mathématiques" ; il y a plein de choses ludiques, pour l'élémentaire, pour l'enseignement professionnel, pour diverses approches de notre enseignement. Pas de droits d'inscription, un hébergement prévu bon marché et une ambiance très conviviale.

François DROUIN est prêt à envoyer les documents papier présentant ce congrès à tous ceux qui ont envie de faire une rentrée en douceur.
Envoyer votre adresse postale à francois.drouin2@wanadoo.fr.
Site de la SBPM : http://www.sbpm.fr