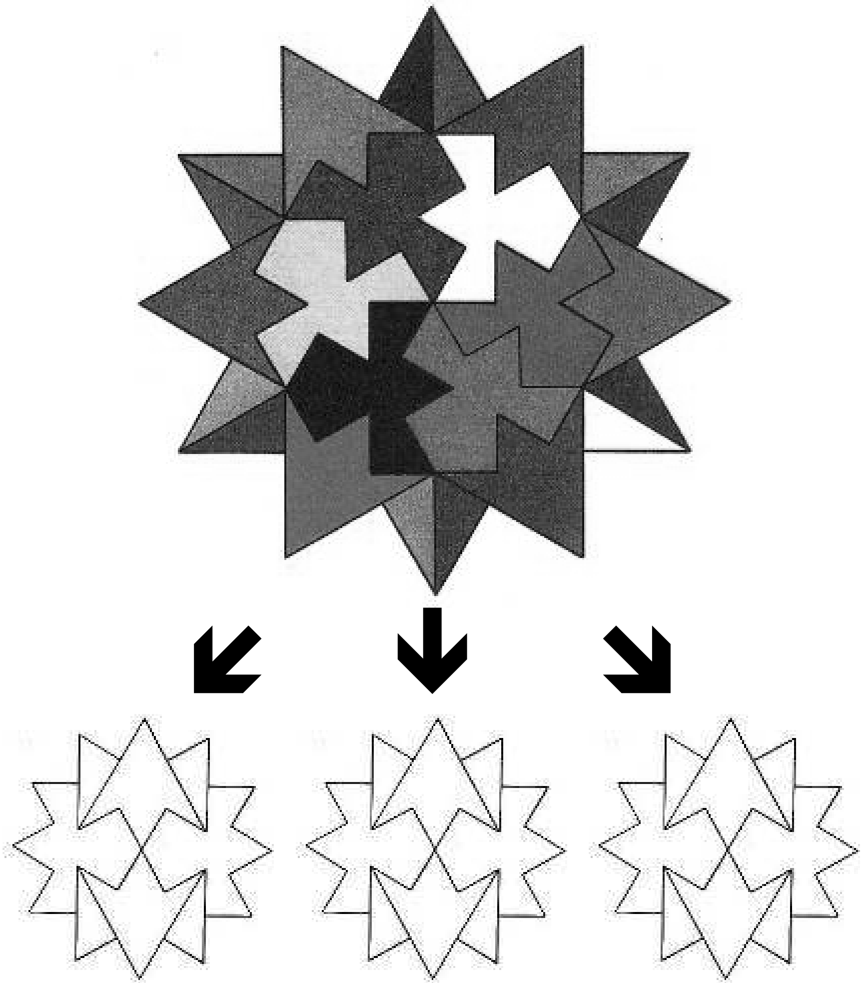
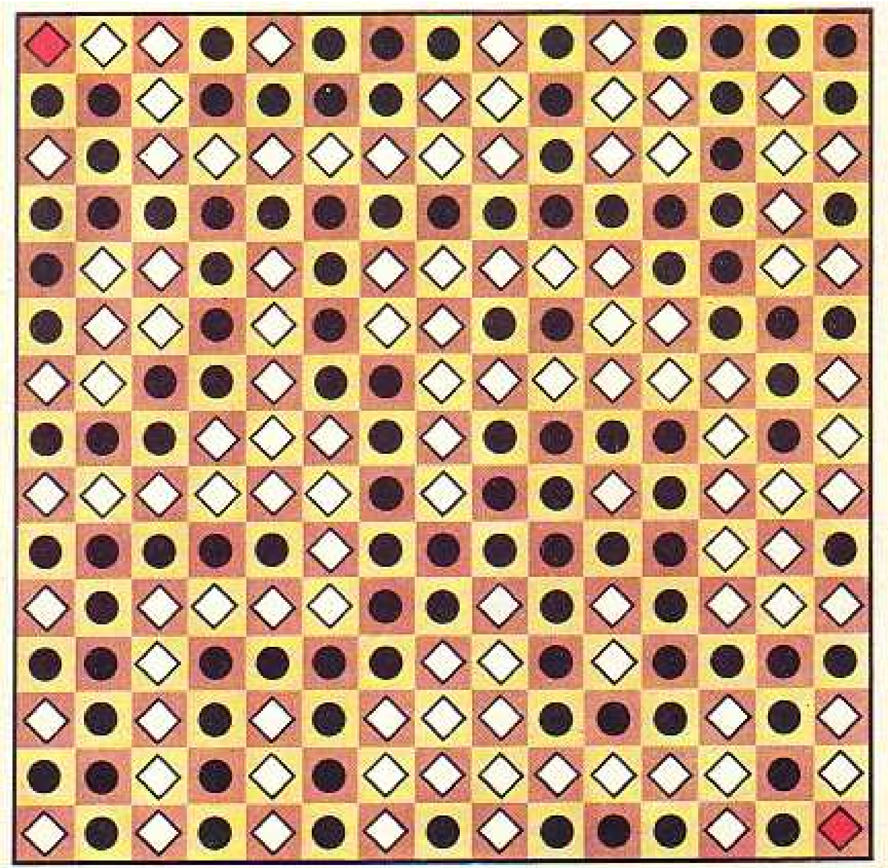
Solution du puzzle n°82

En couverture du numéro de juin, nous vous proposions de reconstituer, à partir des 24 morceaux d'une étoile à 12 branches, trois petites étoiles à 12 branches identiques. Voici comment il fallait procéder :



Notre couverture



Traversez cet échiquier du coin en haut à gauche au coin en bas à droite de sorte que sur le chemin suivi alternent les ronds noirs et les carrés blancs (le chemin ne doit contenir que des segments horizontaux et verticaux).

[Problème proposé par L. Motchalov dans la revue de vulgarisation scientifique russe '***квант***' (Quant) de septembre 1990].

Solution du problème n° 82

Rappel de l'énoncé : **Un triangle inscrit dans un cercle de rayon r = 10 a ses hauteurs proportionnelles à 2, 3 et 4. Calculer les angles et les côtés**.

Plusieurs personnes ont répondu: Fabrice LAURENT, Jacques CHONÉ, Denis PÉPIN, Christophe BRIGHI, Renaud DEHAYE et François PÉTIARD.
Seul ce dernier a trouvé la réponse à la question subsidiaire concernant l'origine du problème. Il s'agissait du sujet de bac 1896, passé par Einstein ([1]).

Ci-dessous la solution de François PÉTIARD :

Les hauteurs sont proportionnelles à 2, 3 et 4 donc les côtés correspondants sont proportionnels à 6, 4 et 3 (on raisonne sur l'aire du triangle). *Figure page suivante.*

Posons $a = BC = 6k$, $b = CA = 4k$ et $c = AB = 3k$.

On en déduit déjà immédiatement grâce à la formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2+c^2 - 2bc.\cos(A)$, les cosinus des trois angles du triangle: $\cos(A) = -11/24$, $\cos(B) = 29/36$, $\cos(C) = 43/48$,
donc les trois angles du triangle : A mesure environ 117,28° ([2]), B environ 36,34° et C environ 26,38° ([3]).

Enfin, les deux formules donnant l'aire S du triangle (p désignant le demi-périmètre du triangle, R désignant le rayon du cercle circonscrit) : $S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)}$ et $S = \dfrac{AB\times BC\times CA}{R}$ nous donnent, puisque $R = 10$ cm et que $BC = 6k$, $CA = 4k$ et $AB = 3k$:
$S = \sqrt{\dfrac{13k}{12}\times\dfrac{k}{2}\times\dfrac{5k}{2}\times\dfrac{7k}{2}} = \dfrac{3k\times 6k\times 4k}{10}$, d'où l'on titre $k = \dfrac{5\sqrt{455}}{36}$

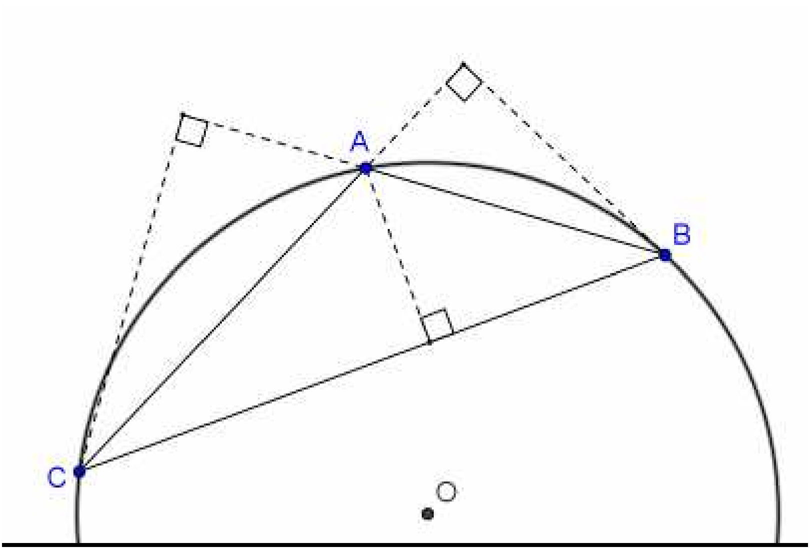
Donc $AB = \dfrac{5\sqrt{455}}{12}$ cm, $BC = \dfrac{5\sqrt{455}}{6}$ cm et $CA = \dfrac{5\sqrt{455}}{9}$ cm.

---

[1] Voir : Jean-Pierre FRIEDELMEYER, *Dossier : Histoire de l'enseignement des mathématiques (III) La copie d'Einstein à l'épreuve de mathématiques du Bac*, Bulletin APMEP n° **444**, janvier-février 2003, pages 63-71.

[2] Einstein avait trouvé (calculs faits à l'aide d'une table de logarithmes) : A = 117° 16' 22".

[3] Renaud Dehaye s'interroge sur ces valeurs : sont-elles rationnelles ? en radians, s'agit-il de fractions de π ?



Problème du trimestre n° 82

Problème proposé par Pol LE GALL et emprunté à la SBPMef (Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française, http://www.sbpm.be/ *)*

Une compagnie internationale possède 70 employés. Si X et Y sont deux quelconques d'entre eux, il y a au moins une langue parlée par X et non par Y et une au moins une langue parlée par Y et non par X.
Quel est le nombre minimum de langues parlées par les employés ?