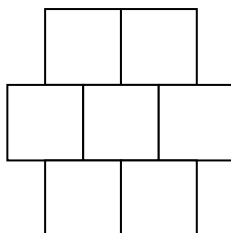
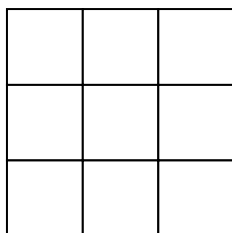


Carrelages et quadrilatères

François DROUIN
Collège Les Avrils
55300 SAINT-MIHIEL



Ce carré pave le plan. Il peut être complètement entouré par des carrés identiques à lui même.

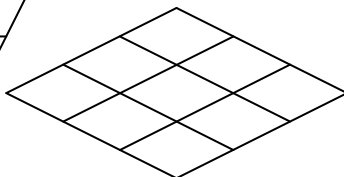
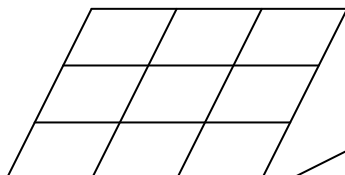
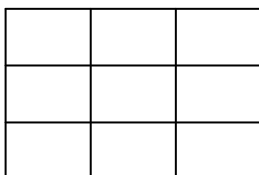


Divers entourages sont possibles, mais nous privilégierons ceux pour lesquels les motifs de base sont accolés par des côtés entiers.

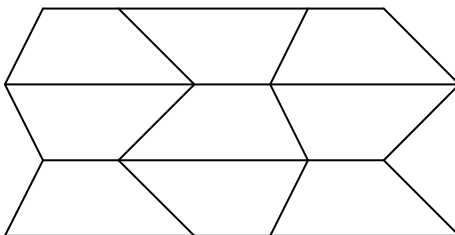
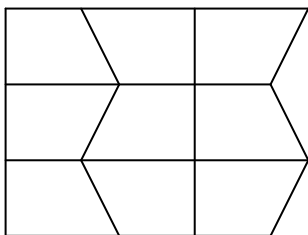
Le pavage du plan par des carrés fait partie de l'univers familier des élèves : dans sa salle de classe, il peut poser les pieds sur des dalles de sol carrées ou lever les yeux sur des dalles de sol carrées. Même allergique à son environnement scolaire, il rencontrera de tels pavages sur le sol, et parfois les murs de son environnement familial.

En classe est proposée l'étude suivante :

Vous êtes carreleur. Je m'adresse à vous pour carreler ma salle de bain avec d'autres quadrilatères que des carrés. Que pouvez-vous me proposer ?

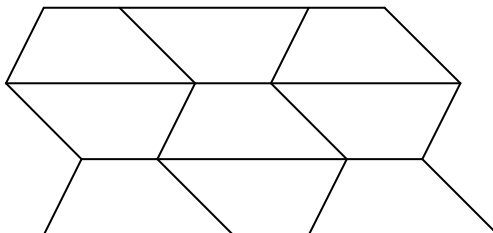
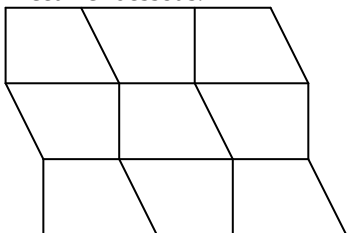


L'assemblage des rectangles, des parallélogrammes et des losanges se fait facilement. Comme les carrés, ils sont posés l'un à côté de l'autre. Les translations apparaissent.



Avec les trapèzes, d'autres types d'assemblages sont mis en œuvre : des symétries orthogonales permettant de passer d'une "ligne" à l'autre sont facilement mises en évidence. Ce type d'assemblage ne peut-être proposé car les carrelages posés ne sont pas retournables : la face qui est collée n'a pas le même aspect que la face qui restera visible.

Les symétries orthogonales étant éliminées, restent des assemblages semblables à ceux ci-dessous.



L'abandon des translations pour ce type d'assemblages se fait aisément. Mais trouver quelque chose n'utilisant pas les symétries orthogonales est moins aisé.

En classe de cinquième :

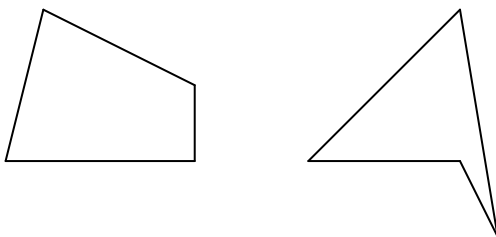
Une nouvelle transformation apparaît : la symétrie centrale.

En classe de quatrième :

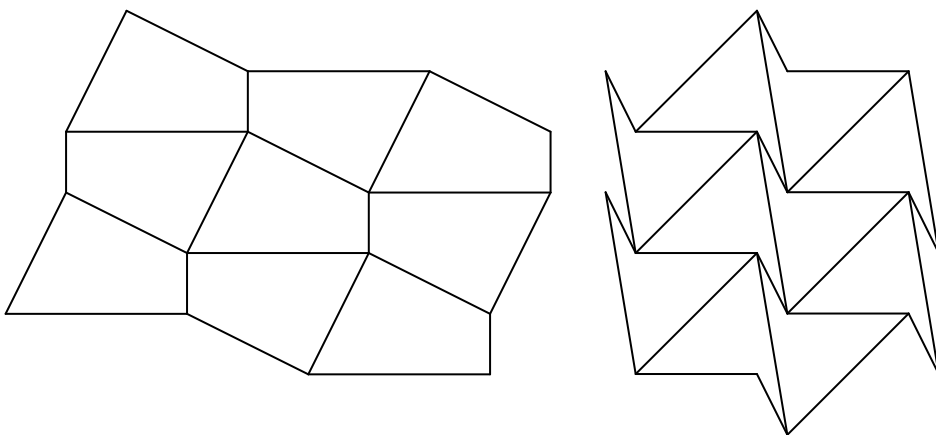
Il y a ici une occasion de réactiver les symétries vues en sixième et cinquième. Les élèves de quatrième ne réussissent pas toujours à les différencier. De plus les translations (nouvelle transformation rencontrée cette année) se rencontrent à plusieurs endroits dans cette activité, en particulier "en diagonale" ou en considérant "une pièce sur deux".

En cinquième et en quatrième, il est intéressant de montrer que les assemblages de carrés, de rectangles, de parallélogrammes ou de losanges pouvaient être également faits en ne mettant en jeu que des symétries centrales.

Il reste à étudier le cas de quadrilatères qui ne sont ni des parallélogrammes, ni des trapèzes.



Les symétries centrales sont utilisées mais l'image mentale du demi-tour autour autour du centre de symétrie n'est pas encore bien claire dans de nombreux esprits

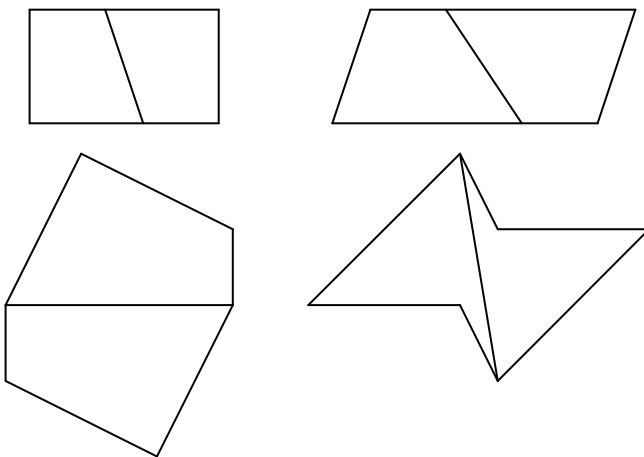


QUELQUES REMARQUES :

Faire manipuler des carrés, des rectangles, des parallélogrammes, des losanges, des trapèzes, des quadrilatères “quelconques” découpés dans du carton facilite la recherche des assemblages (en particulier pour les quadrilatères concaves que les élèves pensent ne pas pouvoir utiliser.

Il est intéressant de faire continuer le recouvrement puis de le faire colorier (l'utilisation du compas pour le tracé des symétriques est rapidement une cause

d'imprécision des tracés, mais l'utilisation de quadrilatères dont les sommets sont des noeuds de quadrillage permet de contourner cette difficulté). Sans consigne particulière, les élèves utilisent deux couleurs selon "l'orientation" des quadrilatères formant l'assemblage. Apparaissent alors les quadrilatères images l'un de l'autre par une translation. Par ailleurs, les élèves remarquent très vite que pour poursuivre le recouvrement, ici aussi des translations apparaissent, en particulier dans la répétition de groupements de deux quadrilatères.



Bien que hors programme en quatrième, les élèves constatent sur des exemples que la composée de deux symétries centrales est une translation.

Bien que ne figurant à aucun moment dans les programmes de collège (et de lycée...), les élèves utilisent le fait que les hexagones admettant un centre de symétrie pavent le plan.

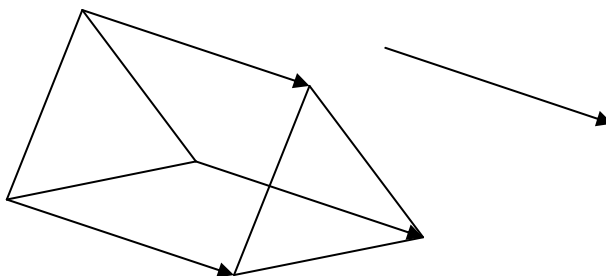
Dans le cheminement proposé, l'obstacle à franchir est l'analyse de ce qui se passe lors de l'utilisation des trapèzes. Ceux-ci ne figurent à aucun moment dans les programmes du collège, sans doute parce qu'ils ne peuvent être reliés directement à une transformation du plan (pour nos élèves, des quadrilatères ayant deux côtés parallèles sont-ils des quadrilatères quelconques?). Et pourquoi les quadrilatères n'admettant qu'un axe de symétrie devraient-ils eux aussi passer à la trappe ?

Le fait que tout quadrilatère puisse paver le plan semble étonner certains collègues : ce résultat ne s'enseigne pas dans les études du futur enseignant. La rencontre précoce avec ces pavages apportera quelques gouttes d'eau au moulin de ceux qui tiennent à l'aspect "culturel" des mathématiques.

En classe de cinquième, certains manuels abordent le pavage du plan par des quadrilatères. Mais l'emploi de la symétrie centrale est donné sans explication, et surtout sans que l'élève ne prenne conscience de la nécessité de cet emploi.

Ce type de travail prend du temps et peut paraître en contradiction avec les horaires hebdomadaires de mathématique en cinquième et quatrième. Mais cet horaire réduit permet-il l'appropriation des concepts mathématiques par les élèves ?

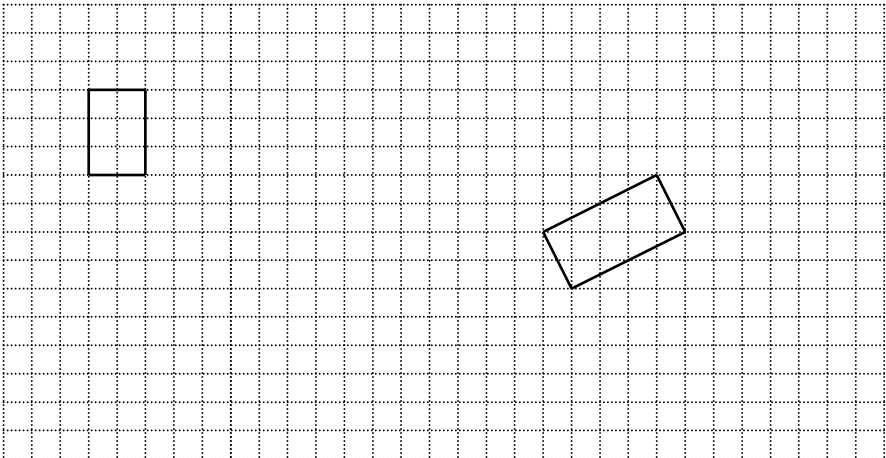
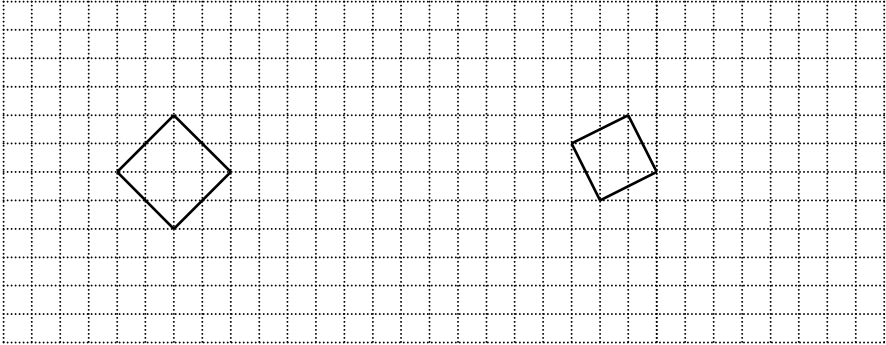
Concernant les translations, il reste à faire émerger les propriétés mises en œuvre. Le papier non quadrillé peut venir à notre secours.



Le déplacement du triangle est visualisé par une flèche (le moteur “vecteur” ne sera donné que plus tard). Pour trouver l'image du triangle après ce déplacement, les élèves n'ont aucune difficulté à préciser qu'il faut tracer des parallèles à la flèche passant par les trois sommets du triangle et que sur ces parallèles, il faut reporter des longueurs égales à la longueur de la flèche. Les parallélogrammes reliés à la translation sont mis en évidence.

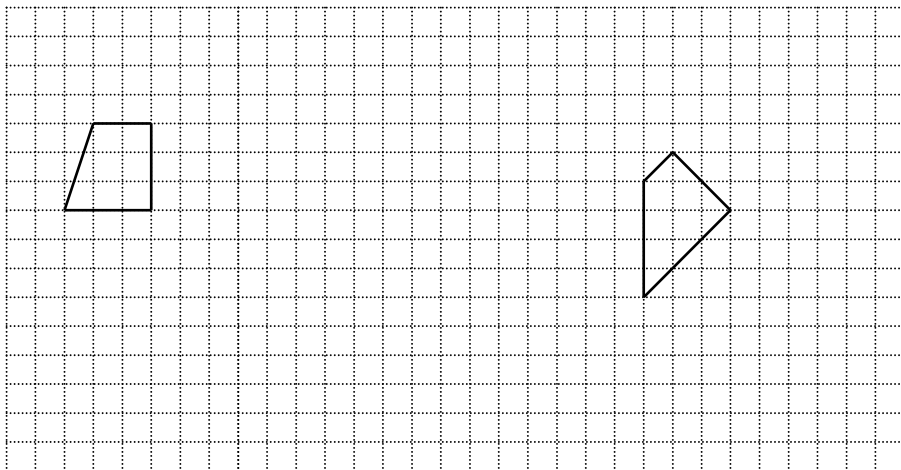
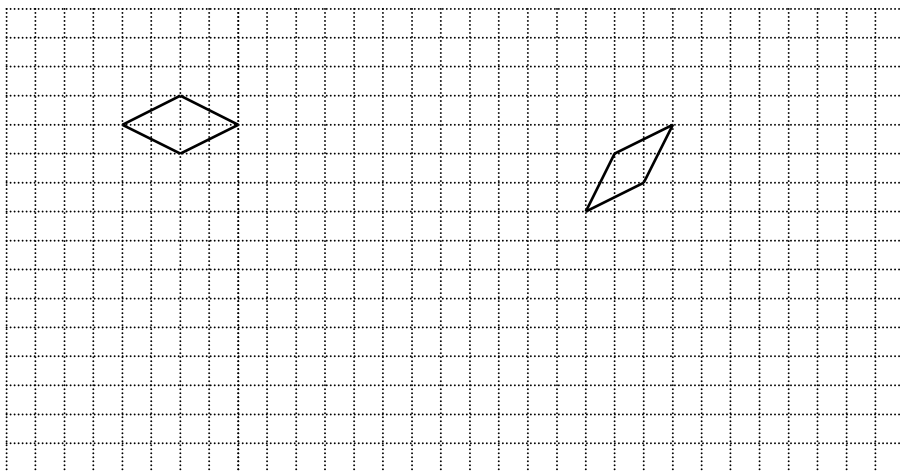
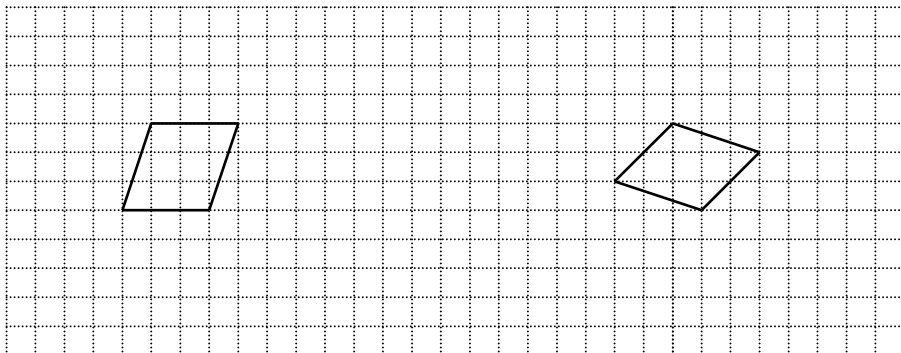
On pourrait proposer aux élèves les documents de travail des pages suivantes.

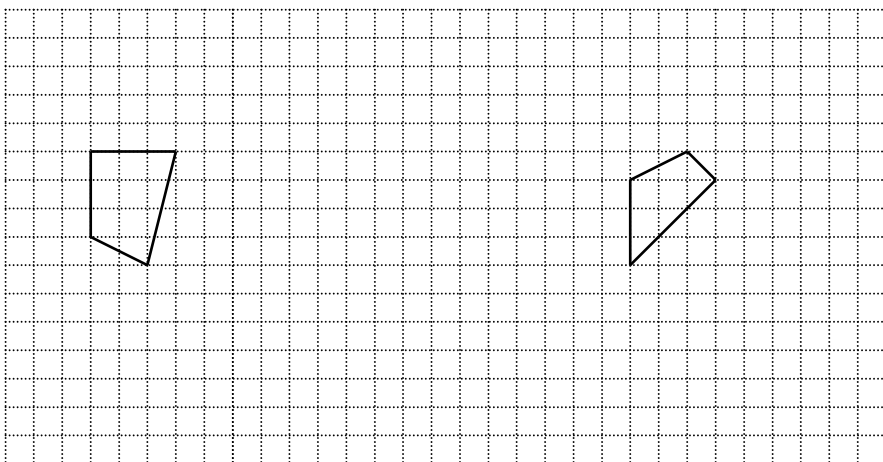
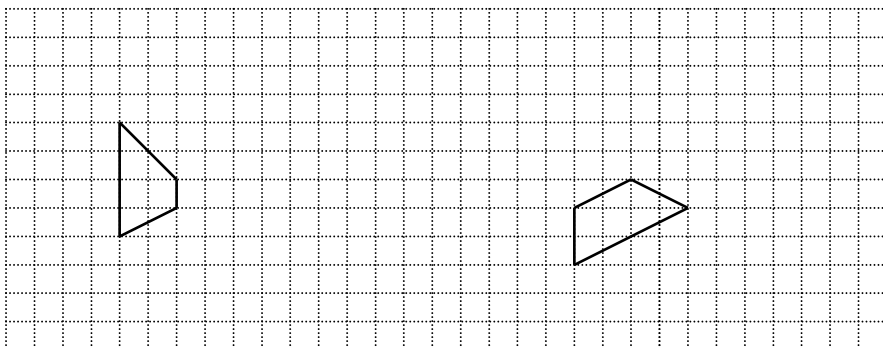
Vous êtes le carreleur. Je m'adresse à vous pour carreler ma salle de bains. Que pouvez-vous me proposer ?



Les deux carrés et les deux rectangles peuvent-ils être utilisés ?

Pour la page 12 : les deux parallélogrammes, les deux losanges, et les deux trapèzes peuvent-ils être utilisés ?





Ci-dessus : les deux trapèzes, et les autres quadrilatères peuvent-ils être utilisés ?