Problème du trimestre n°81

proposé par Loïc Terrier, de Metz

Chasse au lapin sur le tore !

On considère un tore muni d'un quadrillage de 15 cases (3 fois 5).
Un lapin déguste une carotte sur l'une des cases. Absorbé par son repas, il ne bouge pas de cette case. Un chasseur parcourt le tore de manière aléatoire : à chaque étape, il passe équiprobablement d'une case à l'une des quatre cases adjacentes. Lorsqu'il arrive sur la case où se trouve le lapin, il tue ce dernier.
Quelle est l'espérance de vie (exprimée en étapes) du lapin ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à
Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES-CHAUSSY.

Solution du problème du trimestre n°80

proposé par CHRISTOPHE BRIGHI, de Hettange

Rappel de l'énoncé : Soient A, B et C trois points deux à deux distincts de la courbe d'équation : $y=x^3$.
Montrer l'équivalence entre :
A, B et C sont alignés ;
L'isobarycentre de A, B et C est sur l'axe des ordonnées.

Ben oui, c'était facile… Plusieurs habitués de la rubrique problèmes s'en sont étonnés, cherchant le piège, suggérant des prolongements pour donner un peu plus de corps au sujet !
En tous cas ce problème restera (seulement jusqu'au prochain, espérons-le…) dans l'histoire du Petit Vert comme celui qui aura suscité le plus de réponses :
Roger CARDOT, Jacques CHONÉ, Philippe FÉVOTTE, Isabelle HENROT, Dominique ISLER, Fabrice LAURENT, Olivier LÉOMOLD, Nicolas MEYER, Stéphane PASSERAT, Denis PÉPIN, Daniel VAGOST, Jacques VERDIER et l'auteur Christophe BRIGHI.
Treize réponses ! J'espère que je n'ai oublié personne…

Voici (page suivante) la solution de Daniel VAGOST :
Au nombre des remarques et interrogations …

Soient A, B, C trois points de la courbe d'équation $y = x^3$:
$A(a, a^3)$, $B(b, b^3)$ et $C(c, c^3)$ où a, b, c sont trois réels deux à deux distincts (1).
L'isobarycentre G de A, B et C a pour coordonnées
$\left(\frac{a+b+c}{3}; \frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)$
A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ $(b-a, b^3-a^3)$ et $\overrightarrow{AC}$ $(c-a, c^3-a^3)$ sont colinéaires, autrement dit si et seulement si le déterminant D, où

$$D= \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} \text{ est nul.}$$

En développant ce déterminant on trouve facilement
$D = (b\text{-}a)\times(c\text{-}a)\times(c^2-b^2+ac\text{-}ab)$
soit $D=(b-a)\times(c-a)\times(c-b)\times(a+b+c)$
Ce déterminant n'est nul qu'à la condition nécessaire et suffisante que $(a+b+c)$ soit nul (en effet la condition (1) interdit au produit $(b-a)\times(c-a)\times(c-b)$ d'être nul).
$(a+b+c)=0$ est équivalent à $x_G=0$ et donc à “G est sur l'axe des ordonnées ”.

Daniel VAGOST se demande si d'autres fonctions auraient une propriété analogue.
Plusieurs collègues s'interrogent sur l'existence d'autres solutions que celle qui utilise une caractérisation analytique de la colinéarité (déterminants, produit vectoriel, complexes, coefficients directeurs…).
Philippe FÉVOTTE regrette que l'on ne pose pas le problème dans le cas général d'une fonction du troisième degré.
Jacques CHONÉ propose une extension : “ *En faisant tendre, par exemple, C vers A, on obtient par passage à la limite le résultat suivant : si la tangente en un point A de la courbe d'équation $y=x^3$ recoupe cette courbe en B et coupe l'axe Oy en G alors G est le barycentre de {(A,2) (B,1)}.* ”