DANS NOS CLASSES

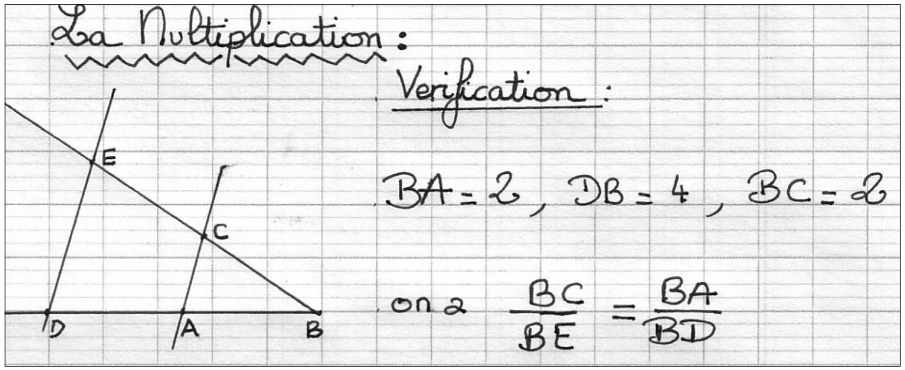
DESCARTES A DIT...

Utilisation d'extraits de “ La Géométrie ” en seconde

*Dans notre bulletin n°80 de septembre 2005 (pages 14-22), Gilles WAEHREN exposait la vision de Descartes sur les rapports de longueur. Au début de cette année scolaire, il a proposé à ses élèves de seconde (une classe option ISI-MPI et une classe option IGC-SES) un devoir maison (**voir énoncé page suivante**), qu'il a analysé pour nous. Faute de place dans ce bulletin, la rédaction a “ réduit ” son texte ; vous pourrez en lire l'intégralité sur notre site (à la rubrique PETIT VERT).*

Ce sujet a été assez largement inspiré d'une brochure d'un IREM de Paris (...).
Nous étions alors en plein chapitre sur les nombres et c'était l'occasion de leur présenter les rationnels et les irrationnels positifs sous un angle plus géométrique en construisant des segments dont la longueur est exactement de la valeur voulue. Cette exactitude tient tant à une construction utilisant la règle et le compas qu'à l'introduction d'une longueur unité.
Bien entendu, il fallut reprendre contact avec les deux "grands résultats" de géométrie du collège : les théorèmes de Thalès et de Pythagore. Les questions relatives aux vérifications ne furent pas une mince affaire et permirent de rappeler le sens du terme "vérifier". Restait encore un problème crucial : la lecture et la compréhension d'un texte dont la formulation désuète présente une difficulté supplémentaire.
Proposer cet exercice en travail personnel sur une semaine n'était peut-être pas la meilleure manière de l'aborder ; mais s'il me tenait à cœur de les faire travailler dessus, cela ne me semblait pas, à première vue, faire partie des connaissances fondamentales d'un élève de Seconde relativement au chapitre en cours – qui touche notamment à des principes de calcul numérique toujours difficiles à

(Suite page 23)



Enoncé du devoir à la maison

Voici comment Descartes propose, dans son livre “ Géométrie ” en 1636, de multiplier ou de diviser des longueurs. Les deux procédés s’appuient sur le théorème de Thalès.

La Multiplication

"Soit par exemple AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication."

1. En utilisant la méthode de Descartes et une longueur unité de son choix, construire un segment de longueur : $a \cdot b$, les longueurs *a* et *b* étant celles des segments ci-contre :
On reportera les longueurs avec le compas et on pensera à vérifier le résultat de la construction en mesurant le segment obtenu et en tenant compte de l’unité choisie.
2. Trouver un raisonnement justifiant la méthode de Descartes.

La Division

"Ou bien s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division."

1. En utilisant la méthode de Descartes, construire un segment de longueur *a/b*.
2. Trouver un raisonnement justifiant la méthode de Descartes.

La racine carrée

La recherche de racine carrée repose sur le théorème de Pythagore.

"Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH, je lui ajoute en ligne droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusqu'à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée..."

1. En choisissant une longueur unité, utiliser la méthode de Descartes pour construire une longueur de mesure v7. Vérifier le résultat.
2. Trouver un raisonnement justifiant la méthode de Descartes.

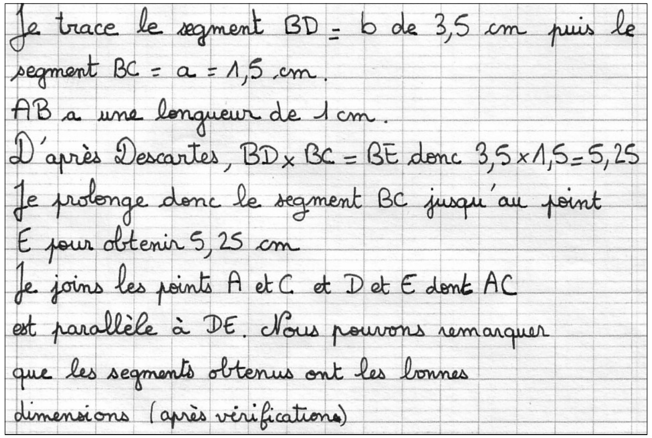
inculquer. Les discussions autour du sujet, les devoirs rendus et la correction en classe ont fléchi ce point de vue (...).

Les devoirs rendus furent de qualité variable : certains élèves, face à un exercice de mathématiques à la forme inattendue, se sont braqués (l’imprévu et la nouveauté n’étant pas ce que préfèrent les élèves moyens) en fournissant un travail incomplet ou peu personnel ; mais ce n’est pas le cas de tous les élèves faibles. D’autres se sont investis dans toutes les questions proposant des solutions originales ou du moins empruntes d’un certain souci de rigueur.

La réalisation des figures

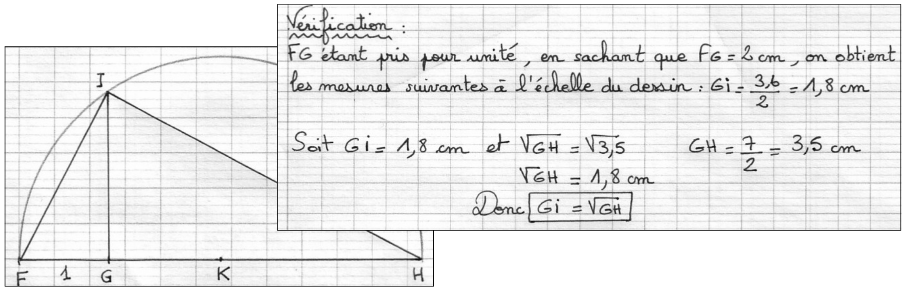
Reporter au compas les longueurs de l’énoncé ne fut pas mince affaire, le procédé n’étant pas habituel dans les exercices de géométrie. Cependant, c’est là que l’exercice prend tout son sens : les mesures ***a*** (3,5 cm sur l’énoncé) et ***b*** (1,5 cm) des segments donnés dans le sujet ne doivent bien sûr pas intervenir dans la construction afin que la vérification qui suit ne soit pas une évidence. Certains dessins comportent des erreurs de report à ce niveau là comme c'est clairement le cas dans l'extrait du bas de la page 22.

(...) Enfin, quelques élèves ont proposé des programmes de construction détaillés de chaque figure comme je le leur avais suggéré. Ces programmes ont révélé des compréhensions différentes du texte et auraient pu être exigés dans l'énoncé. En voici un exemple :


Je trace le segment BD = b de 3,5 cm puis le segment BC = a = 1,5 cm.
AB a une longueur de 1 cm.
D'après Descartes, BD x BC = BE donc 3,5 x 1,5 = 5,25
Je prolonge donc le segment BC jusqu'au point E pour obtenir 5,25 cm
Je joins les points A et C et D et E dont AC est parallèle à DE. Nous pouvons remarquer que les segments obtenus ont les bonnes dimensions (après vérifications)

Cette construction a été réalisée de manière à ce que la figure ait les bonnes mesures et respecte les contraintes. Ce programme peut alors se justifier par la réciproque du théorème de Thalès tandis que la méthode de Descartes s'appuie sur l'utilisation du sens direct.

La recherche de la racine carrée dont la méthode plus détaillée n'aurait pas dû laisser de doutes s'est parfois heurtée à un problème d'échelle. Pour la multiplication et la division, les longueurs ***a*** et ***b*** à reporter ne dépendaient pas de la longueur unité choisie ; par contre, la mesure en centimètres du segment de longueur 7 variait selon que l'on choisisse FG de mesure 1 cm ou 2 cm. Souvent quand FG mesurait 2 cm, GH n'était que de 7 cm au lieu de 14. La vérification qui s'ensuivait pouvait s'avérer délicate... et laisser le correcteur perplexe. En voici un exemple :



Vérification :
FG étant pris pour unité, en sachant que FG = 2 cm, on obtient les mesures suivantes à l'échelle du dessin : $Gi = \frac{3,6}{2} = 1,8$ cm

Soit $Gi = 1,8$ cm et $\sqrt{GH} = \sqrt{3,5}$ $GH = \frac{7}{2} = 3,5$ cm
$\sqrt{GH} = 1,8$ cm
Donc $\boxed{Gi = \sqrt{GH}}$

Les vérifications

L'utilisation de la règle dans le cadre d'une vérification s'est finalement avérée plus ardue que prévu. Si une majorité d'élèves a fini par retenir que des mesures faites avec cet instrument ne constituent pas une justification, on peut surtout penser que comparer la longueur BE avec le produit BC · BD ne leur a pas paru aussi évident que cela pouvait sembler. Constater comme étant juste une construction par laquelle tout a été fait, a priori, pour obtenir le résultat voulu n'est pas forcément pertinent surtout quand la longueur unité choisie est 1 cm (rien n'était imposé !). Enfin, ce travail supposait, d'une certaine manière, qu'on établisse une égalité, une technique dont la rédaction n'est pas encore bien maîtrisée.

Ainsi, entre un travail rigoureux et une simple constatation, beaucoup de copies proposaient, dans cette question, une ébauche de la démonstration exigée dans la question qui suivait. Il en ressort tout de même que les élèves qui avaient choisi la mesure de AB différente de 1 cm ont souvent mieux cerné l'importance de la question. Exemple :

Je mesure les segments :

BE = 1,75 cm = $\frac{1,75}{3}$ u = $\frac{7}{12}$ unité

BC = 3,5 cm = $\frac{3,5}{3}$ u. = $\frac{7}{6}$ unité

BD = 1,5 cm = $\frac{1,5}{3}$ u = $\frac{3}{6}$ unité

Est-ce que BE = a × b = BD × BC ?

BE = $\frac{7}{12}$ unité. BD × BC = $\frac{7}{6}$ u. × $\frac{3}{6}$ u. = $\frac{21}{36}$ u. = $\frac{7}{12}$ unité

Donc les deux quotients sont égaux donc BE = BD × BC.

La vérification relative à la racine carrée n'a pas présenté de difficulté à ceux qui avaient bien suivi les instructions de Descartes.

Les démonstrations

(...) La démonstration de l'extraction de racine carrée par le théorème de Pythagore s'est déclinée sous trois formes :

- l'utilisation des noms des sommets des trois triangles rectangles de la figure dans une rédaction rigoureuse y compris le passage un peu délicat où il faut combiner les trois relations de Pythagore pour exprimer GI en fonction de GH ;
- le remplacement dans les égalités évoquées précédemment de la longueur GH par le nombre 7 ;
- le remplacement dans les égalités évoquées précédemment des longueurs par des lettres telles que x pour désigner la longueur GI.

Le passage difficile a parfois été contourné par la résolution d'un système.
Par ailleurs, quelques élèves, dont la source d'inspiration n'a pas été vraiment déterminée, ont employé les résultats de trigonométrie en remarquant que les angles des trois triangles rectangles étaient égaux (les triangles semblables n'avaient alors pas été abordés).

Conclusion

(...) Les productions des élèves ont mis en évidence les failles du sujet et on peut envisager les modifications suivantes :

- exiger un programme de construction pour évaluer vraiment l'interprétation de l'énoncé ;
- proposer des segments ***a*** et ***b*** plus longs pour faciliter la construction ;
- imposer que le segment unité AB ne mesure pas 1 cm ; etc.

(...) Ce travail permet également de marquer un peu plus la distance avec l'emploi des longueurs mesurées dans les démonstrations en géométrie. L'astuce de la longueur unité – et on peut le noter dans l'œuvre même de Descartes – est également un mode de transition vers des longueurs désignées par des lettres dans les calculs géométriques. (...)
Un texte historique en mathématiques nous met face à nos connaissances et notre compréhension des notions. Pour les élèves, la formulation un peu étrange est un changement par rapport à celle très précise des exercices habituels : ils peuvent constater l'évolution qu'a subi ce langage de même que le leur est amené à évoluer aussi. Le champ de leurs connaissances mathématiques s'enrichit d'un nom de savant qui ne soit pas grec. Enfin, ce texte de Descartes met en évidence la filiation entre ces mathématiciens grecs qu'ils ont découverts au collège et ceux qu'ils pourront connaître au lycée.

Gilles WAEHREN