Solution du problème du trimestre n°77

proposé par Michel HENRY (Besançon), qui le tient de Marcel CANDAMINE

On considère l'équation : $1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{\cfrac{\dots}{1+\cfrac{2}{x}}}}} = 3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{3+\cfrac{4}{\cfrac{\dots}{3+\cfrac{4}{x}}}}}$

Il y a n traits de fraction de part et d'autre du signe égal. -1 est solution évidente de l'équation. Soit x_n l'autre solution.

Peu de solutions pour ce problème : Jacques Choné, Loïc Terrier et Michel Henry lui-même. Voici la solution (abrégée) de l'auteur.

–1 annule en effet chacun des membres de l'équation.
Soient $f(x) = 1 + 2/x$ et $g(x) = 3 + 4/x$ les fonctions homographiques dont les deux membres de l'équation sont les nièmes itérés. L'équation proposée s'écrit donc $f_n(x) = g_n(x)$ où $f_0(x) = x$ et $f_1(x) = f(x)$ [resp. $g_0(x) = x$ et $g_1(x) = g(x)$] et $f_n = f$ o f o…o f (resp. $g_n = g$ o g o… o g) composée n fois.
Comme la composée de fonctions homographiques est une fonction homographique, et comme dans cette itération le numérateur de f_{n-1} (resp. g_{n-1}) devient le dénominateur de f_n (resp. g_n), ces deux membres peuvent aussi être écrits sous la forme de fractions rationnelles en x, (*encadrées ci-contre*), dont l'égalité conduit pour $n > 1$ à une équation du second degré de la forme $Ax^2 + Bx + C = 0$, ayant –1 pour racine. On désigne par x_n son autre racine vérifiant $(-1).x_n = C/A$; x_n est alors solution de l'équation donnée dès lors qu'elle n'annule pas $f_p(x_n)$ ou $g_p(x_n)$ pour un $p < n$, ce qui peut être vérifié a posteriori.

$$f_n(x) = \frac{a_n x + b_n}{a_{n-1}x + b_{n-1}} \text{ et } g_n(x) = \frac{a'_n x + b'_n}{a'_{n-1}x + b'_{n-1}}$$

Pour étudier cette suite (x_n), déterminons A et C. On obtient facilement les relations de récurrence :

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$ pour a_n,
$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$, avec $b_0 = 0$ et $b_1 = 2$ pour b_n,

relevant de la même équation caractéristique [*une "suite géométrique (r^n), solution de cette récurrence linéaire, vérifie $r^2=r+2$. Les deux suites $x'_n = (-1)^n$ et $x''_n = 2^n$ forment une base de l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions qui sont donc de la forme indiquée : $(-1)^n\alpha + 2^n\beta$ Les composantes α et β des suites considérées sont déterminées par les deux conditions initiales données.*] : $(r+1)(r-2) = 0$, qui met en évidence que –1 et 2 sont les points fixes de f. a_n et b_n sont donc de la forme $(-1)^n\alpha + 2^n\beta$, où α et β sont déterminés par les conditions initiales. On en déduit :

$$a_n = \frac{2\cdot 2^n + (-1)^n}{3} \text{ et } b_n = \frac{2\cdot 2^n - 2\cdot(-1)^n}{3}$$

De même, on a :

$a'_n = 3a'_{n-1} + 4a'_{n-2}$, avec $a'_0 = 1$ et $a'_1 = 3$ pour a'_n,
$b'_n = 3a'_{n-1} + 4b'_{n-2}$, avec $b'_0 = 0$ et $b'_1 = 4$ pour b'_n,

avec l'équation caractéristique (r+1)(r–4) = 0, exhibant les points fixes –1 et 4 de *g*.
a'_n et b'_n sont donc de la forme $(-1)^n\alpha' + 4^n\beta'$, déterminés aussi par leurs conditions initiales, d'où :

$$a'_n = \frac{4\cdot 4^n + (-1)^n}{5} \quad et \quad b'_n = \frac{4\cdot 4^n - 4\cdot(-1)^n}{5}$$

On a donc , $x_n = -\frac{C}{A} = -\frac{b'_n b_{n-1} - b_n b'_{n-1}}{a'_n a_{n-1} - a_n a'_{n-1}}$

f r a c t i o n dont les termes sont des puissances de 2 et dont le rapport des termes de plus haut degré est –1. La suite (x_n) est donc convergente de limite –1.

Un calcul numérique rapidement mis en œuvre sur un tableur donne les premiers éléments de cette suite :

n	x_n	*n*	x_n	*n*	x_n
		11	-0,99634414	21	-0,999996424
2	-4	12	-1,001831725	22	-1,000001788
3	-0,363636364	13	-0,999084864	23	-0,999999106
4	-1,517241379	14	-1,000457806	24	-1,000000447
5	-0,789115646	15	-0,999771143	25	-0,999999776
6	-1,12	16	-1,000114444	26	-1,000000112
7	-0,942972609	17	-0,999942781	27	-0,999999944
8	-1,029469548	18	-1,00002861	28	-1,000000028
9	-0,985451129	19	-0,999985695	29	-0,999999986
10	-1,007334963	20	-1,000007153	30	-1,000000007

Remarque : On peut voir que –1 est un point fixe " instable " pour f et g, alors que 2 est un attracteur pour les itérés de f et 4 pour les itérés de g, quelle que soit la valeur initiale x_0 différente de –1 : si $f(-1) = -1$ et $g(-1) = -1$ pour tout *n*, en revanche, pour tout x_0 différent de –1, $f^n(x_0) \to 2$ et $g^n(x_0) \to 4$ quand *n* tend vers l'infini.

Jacques Choné précise la solution en donnant un équivalent : $-1+15(-1/2)^{n+1}$.

Retour sur le problème numéro 76

Joël Kieffer revient sur le problème des piles proposé par Philippe Févotte avec une jolie solution basée sur la théorie des jeux :
On pose $X_0 = 1 + N$, N étant la hauteur de la pile . X_1 le résultat du premier tir , etc.
Avant le premier tir , un joueur parie une unité et répartit sa mise de manière égale sur les N événements " $X_1 \le k$ ".
L' événement " $X_1 \le k$ " ayant la probabilité k/N, il doit rapporter N/k fois sa mise, c'est à dire (1/N).(N/k)= 1/k , pour que le jeu soit équitable .
Si on se place du point de vue de la banque, G_1 = 1 – somme (1/k ; $X_1 \le k < X_0$) est la variable aléatoire "gain sur le premier jeu ". Son espérance est nulle , puisque le jeu est équitable .
Avant le second tir , le joueur parie à nouveau une unité , de la même manière .
G_2 = 1 – somme (1/k ; $X_2 \le k < X_1$) et **E(G_2) = 0** ; etc., etc., le jeu continue jusqu'au temps T , où $X_T = 1$; la variable aléatoire "gain total de la banque" est $S_T = G_1 + G_2 + \ldots + G_T$.
Il est clair que **S_T = T – somme(1/k ; $X_T \le k < X_0$) = T – somme(1/k ; $1 \le k \le N$) .**

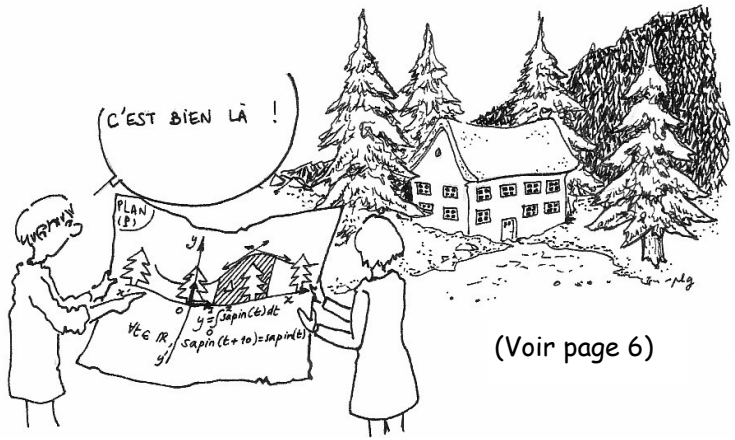
Problème du trimestre n°78

proposé par Benoît CADO, de Nancy

Soit $A_1A_2\ldots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Que vaut le produit des distances $A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cdot \ldots \cdot A_1A_n$?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à

Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES.



(Voir page 6)

ORLÉANS

Les Journées nationales auront lieu à Orléans les dimanche 24, lundi 25 et mardi 26 octobre (pendant les vacances de la Toussaint) : vous n'aurez donc pas besoin d'autorisation d'absence pour y participer. Cependant, si vous êtes en activité, nous vous conseillons vivement, pour pouvoir être couvert en cas " d'accident de travail ", de vous inscrire en septembre au P.A.F., et bénéficier ainsi d'un " ordre de mission " (sans remboursement de frais).

Par ailleurs, il est " de tradition ", dans notre régionale où la convivialité n'est pas un vain mot, que les participants Lorrains se retrouvent un soir pour dîner tous ensemble dans un même restaurant : ce sera le lundi 25 au soir ; la réservation se fera au cours de la réunion de la régionale du dimanche. Il est également " de tradition " que la plupart des inscrits se retrouvent dans le même hôtel : nous avons choisi l'hôtel économique " 1ère classe " d'Olivet-La Source, tout proche du campus universitaire (réservez au 02.38.63.83.00).