Problème du trimestre n°80

proposé par CHRISTOPHE **B**RIGHI, de Hettange

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts de la courbe d'équation : $y=x^3$.
Montrer l'équivalence entre :

A, B et C sont alignés ;

L'isobarycentre de A, B et C est sur l'axe des ordonnées.

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à

Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES-CHAUSSY.

Solution du problème du trimestre n°79

proposé par Pol **LE GALL**, de Courcelles-Chaussy

En troisième on présente deux algorithmes de recherche du PGCD : l'algorithme d'Euclide et l'algorithme des différences (utilisant le fait que PGCD (a , b) = PGCD(a , a-b)).
La plupart du temps ce deuxième algorithme est nettement plus lent que le premier. Mais existe-t-il des paires de nombres pour lesquelles les deux algorithmes sont équivalents du point de vue de la rapidité et aboutissent après

C'est encore le coup du lapin ! Plusieurs solutions, rédigées, mailées ou échangées oralement… de François PÉTIARD, Joël KIEFFER, André STEF et Jacques CHONÉ à ce problème sur la comparaison des deux algorithmes de recherche du PGCD. Tous ont immédiatement perçu qu'il y avait du Fibonacci là-dessous !

Ci-dessous la réponse complète de Jacques CHONÉ.

Soit (f_n) la suite de Fibonacci définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour tout n de **N** : $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.
Soit k un nombre entier naturel non nul.

Montrons par récurrence que, pour tout n entier strictement positif, on obtient le PGCD de kf_{n+2} et de kf_{n+1} après exactement n étapes, aussi bien par l'algorithme d'Euclide que par l'algorithme des différences.

On a : $kf_3 = 2k$ et $kf_2 = k$. L'algorithme d'Euclide (PGCD}($2k$,k)= PGCD(k,0)) et l'algorithme des différences (PGCD}($2k$, k) = PGCD(k , k)) aboutissent tous deux

en une étape. La proposition est donc vraie pour n=1.
Soit n un entier strictement positif ; supposons que la proposition soit vraie pour n.
Comme $kf_{n+3} = kf_{n+2} + kf_{n+1}$ avec $kf_{n+1} < kf_{n+2}$, car la suite $(f)_{n>1}$est strictement croissante, la première étape de l'algorithme d'Euclide et de celui des différences ramène la détermination de PGCD(kf_{n+3} , kf_{n+2}) à celle de PGCD(kf_{n+2} , kf_{n+1}).
D'après l'hypothèse de récurrence, le nombre d'étapes nécessaires pour avoir PGCD(kf_{n+3} , kf_{n+2}), par chacun des deux algorithmes, est donc ($n+1$), ce qui termine la démonstration.

Compléments :

```
eu[a_, b_] :=
  Block[{n = 0, u = a, v = b, w},
    While[v != 0, n++; w = Mod[u, v]; u = v; v = w]; n]

d[a_, b_] :=
  Block[{n = 0, u = a, v = b, w},
    While[v != u, n++; w = Abs[u - v]; If[v > w, u = v; v = w, u = w]]; n]

p[n_] := Block[{l = {}, u, v},
    For[u = 2, u <= n, u++,
      For[v = 2, v < u, v++,
        If[(GCD[v, u] == 1) && eu[u, v] == d[u, v], l = Append[l, {u, v}]]]];  l]

p[200]

{{3,2},{5,3},{8,5},{13,8},{21,13},{34,21},{55,34},{89,55},{144,89}}

Table[Fibonacci[n],{n,0,15}]
```

1. Voici un programme en Mathematica permettant de conjecturer le résultat précédent :
Commentaires : eu et d donnent le nombre d'étapes nécessaires pour avoir le PGCD dans les algorithmes d'Euclide et des différences, respectivement. p donne tous les couples d'entiers (a, b) premiers entre eux et tels que $1<b<a<n+1$ pour lesquels les nombres d'étapes pour avoir PGCD(a,b) par les deux algorithmes sont égaux.

2. **Théorème**
Si a et b sont des entiers tels que 0<b<a et si l'algorithme d'Euclide requiert exactement n étapes pour trouver leur PGCD, alors $b = f_{n+1}$ ***et*** $a = f_{n+2}$

Démonstration :

Soit a et b vérifiant les hypothèses du théorème ; notons $a_n = b$ et $a_{n+1} = a$.

Les n étapes de l'algorithme sont :

$a_{n+1} = q_1 a_n + a_{n-1}$
$a_n = q_2 a_{n-1} + a_{n-2}$
.....
.....
$a_4 = q_{n-2} a_3 + a_2$
$a_3 = q_{n-1} a_2 + a_1$
$a_2 = q_n a_1$

Tous les nombres ci-dessus sont des nombres entiers naturels non nuls donc au moins égaux à 1.
Par ailleurs le quotient final q_n est au moins égal à 2, sinon on aurait $a_1 = a_2$ et le reste de l'avant dernière division serait égal au diviseur. On en déduit, successivement, en partant de la dernière égalité :

$a_2 = 2.1 = 2$
$a_3 = 1.2 + 1 = 3$
$a_4 = 1.3 + 2 = 5$
$a_5 = 1.5 + 3 = 8$
etc...

On obtient alors le résultat à l'aide de cette méthode et d'une récurrence simple.

Référence :
Excursion in Calculus, An interplay of the continuous and the discrete, Robert M.